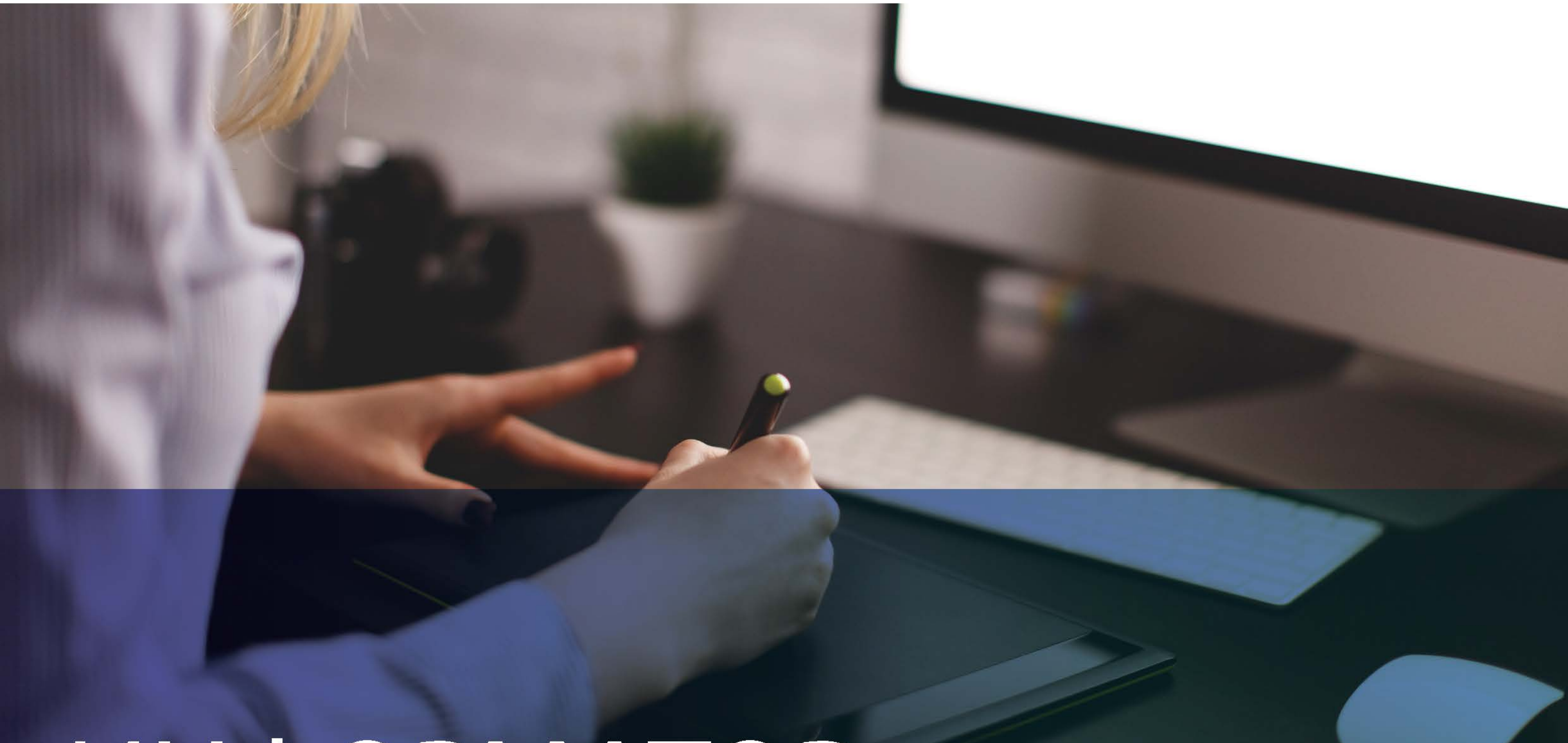
ВИСОКА ТЕХНИЧКА ШКОЛА
СТРУКОВНИХ СТУДИЈА НИШ



ИНФОРМАТОР

Са збирком решених задатака

За упис на прву годину основних струковних студија
у школској 2019/2020. години

Предговор

Висока техничка школа струковних студија из Ниша - ВТШ Ниш, је акредитована, државна, самостална, високошколска установа која образује струковне инжењере за потребе привреде и индустрије региона и шире. Савремен и иновативан приступ учењу обезбеђује нашим студентима практична знања и отварање великих могућности при запошљавању.

Овај Информатор служи да будућим студентима Високе техничке школе струковних студија у Нишу, помогне при избору студијског програма на коме ће наставити школовање и олакша полагање пријемног испита из математике.

Информатор вам пружа основне информације о Школи, студијским програмима које Школа нуди, условима уписа, стратегији обезбеђења квалитета студија и неким од осталих активности којима се Школа бави. Такође, будући бруцоши, кроз овај информатор могу да добију информације о технилким капацитетима наше установе као и и опремеи која ће им бити на располагању током целог периода студирања.

Овде ћете наћи упутства за пријаву на конкурс и информације о начину полагања пријемног испита.

Полагање пријемног испита из математике је обавеза будућих студената и овде ћете пронаћи задатке са објашњењима и упутствима за њихово решавање и примере тестова са пријемног испита ранијих година.

Поздравна реч

Поштовани будући студенти,

Висока техничка школа струковних студија више од четири деценије образује успешне струковне инжењере за потребе привреде и индустрије. Лидери смо струковног образовања у овом делу Србије из године у годину потврђујемо то лидерство. Иновативан приступ наставном процесу учењу, отвореност ка новинама које доноси индутријска револуција 4.0, омогучује нашим студетнима нова аликативна знања која су потребн тржишту рада. Тржиште рада добро препознаје струковне инжењере саобраћаја, ИКТ-а, електронике, машинства, грађевине и заштите животне средине са дипломама наше установе.

Наша опредљеност и отвореност у сарадњи са привредом, отворила је врата нашим студетнима да се оспособљавају у оквиру стручне праксе, током студирања, а и касније за успешно решавање сложених техничких проблема, да унапређују и управљајају производним процесима и да ко одгворни људи дају свој пуни допринос развоју нашег друштва.

У претходној школској години постигли смо два велика успеха, који су резултат нашег преданог рада и посвећености свих нас, нашим студентима.

ВТШ Ниш је добила од стране Европске агенције за образовање, аудио-визуелизацију и културу - ***ЕАСЕА, Повељу ЕРАСМУС +,*** *као потврду и награду за уложене напоре у развоју на пољу интернационализације.*

Такође, Министарство Просвете, Науке и Технолошког Развоја Републике Србије, у оквиру пројектног позива Развоја Високог образовања, препознало је нашу иновативност и одобрило нам је реализацију два развојна пројекта: ``Пројекат Форирање лабораторије IOT као и пројекат ``Иновирања програмских садржаја групе предемта у оквиру групе енергетских предмета.

Звање струковног инжењера, студент може да стекне у року од три године (180 ЕСПБ), уз један неопходан услов, а то је да активно учествује у наставном процесу, континуално ради на својим пројектним задацима, и буде отворен за стицање нових знања.

У новој школској 2019/2020., желимо да заједно са Вама, постигнемо још боље резултате.

Добродошли

10 добрих разлога зашто студирати ВТШ Ниш

1. ***Зато што*** *је иза нас више од четири деценије дуге и успешне традиције и што предњачимо у развоју друштва;*
2. ***Зато што су*** *наши студијски програми и наше дипломе свих нивоа студија препознате на тржишту рада; гарантују запошљење и пружају могућност стипендирања током школовања;*
3. ***Зато што се*** *у току студија на ВТШ студент може ослањати на стручне професоре, посвећене свом позиву;*
4. ***Зато што Вам ВТШ*** *обезбеђује професионалну стручну праксу и примену стечених знања у реалним производним процесима а касније и могућност запошљавања;*
5. ***Зато што*** *Вас учимо да професионални живот није само професија већ и живот;*
6. ***Зато што*** *ВТШ има успешну међународну сарадњу и омугаћава Вам студијске боравке и размену са другим студнетима на Универзиеттима из Европске Уније и региона.*

7. ***Зато што*** *је студетнима на располагању пет најсавременијих лабораторија и друга опрема;*
8. ***Зато што*** *ће ВТШ Ниш, у наредној години опремити још две савремене лабораторије****, ''IOT-internet of things'' лабораторију*** *и* ***лабораторију за развој саобраћајног инжењерства,*** *једину у овом делу .*
9. ***Зато што*** *је ВТШ међу првима у Србији акредитована као високо-школска установа са шест студијских програма на основним, два студијска програма на специјалистичким студијама и два мастер струковна програма;*
10. ***Зато што*** *њене дипломе значе.*

• ЗАПОСЛЕЊЕ

• КАРИЈЕРА

• ЕФИКАСНОСТ

• ИНТЕРДИСЦИПЛИНАРНОСТ



Свој „пут“ установа је започела, као ***Виша школа за образовање радника "Станко Пауновић" 1976.*** год. Школа се брзо развијала и одговарала изазовима тржишта. Школа је променила име у ***Виша техничка школа*** 1983. год., и од тада се бави образовањем кадра техничко-технолошке струке. Након 2007. год. и успешно реализоване акредитације, школа је добила данашњи назив ***"Висока техничка школа струковних студија***".

Школа реализује укупно десет студијских програма, шест на основим студијама: Индустријско инжењерство, Друмски саобраћај, Комуникационе технологије, Савремене рачунарске технологије, Грађевинско инжењерство и Заштита животне средине, два програма на специјалистичким студијама: Безбедност друмског саобраћаја и Комунално инжењерство, а од 2017. године, два програма на мастер струковним студијама: Управљање отпадом и Мултимедијалне комуникационе технологије.

О НАМА

Висока техничка школа струковних студија из Ниша је угледна државна високошколска институција са више од **40 година** дугом традицијом образовања у областима машинства, електротехнике, грађевине, саобраћаја. Школа ради у складу са Законом о високом образовању и одлукама Комисије за Акредитацију и Проверу Квалитета Републике Србије КАПК. Школа је акредитована за извођење наставе на основним 180 ЕСПБ, специјалистичким студијама 240 ЕСПБ и мастер струковним студијама 300 ЕСПБ. Школа, у складу са својом дозволом за рад и уверењима за акредитацију студијских програма, уписује укупно **360** студената на основним студијама на својих шест студијских програма од којих се **205 школује о трошку буџета** и **155 самофинансирајућих студенат**а. На мастер струковним студијама, Школа уписује укупно 64 самофинансирајућих студената и исто толико на – специјалистичким студијама.



Акредитација школе и студијских програма

Висока техничка школа струковних студија из Ниша је једина државна установа овог типа у Нишу. ВТШ Ниш и њени студијски програми акредитовани су од стране Комисије за акредитацију и проверу квалитета Републике Србије КАПК, а дозвола за рад је издата од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Основне студије *(I степен високог образовања)*

Број решења	СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ	Стручни назив - звање:
612-00-00155/2012-04 од 27.04.2012.	ИНДУСТРИЈСКО ИНЖЕЊЕРСТВО	Струковни инжењер индустријског инжењерства
612-00-01172/2012-04 од 07.06.2013.	ДРУМСКИ САОБРАЋАЈ	Струковни инжењер саобраћаја
612-00-00155/2012-04 од 27.04.2012.	КОМУНИКАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ	Струковни инжењер електротехнике и рачунарства
612-00-00155/2012-04 од 27.04.2012.	САВРЕМЕНЕ РАЧУНАРСКЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ	Струковни инжењер електротехнике и рачунарства
612-00-00155/2012-04 од 27.04.2012.	ГРАЂЕВИНСКО ИНЖЕЊЕРСТВО	Струковни инжењер грађевинског инжењерства
612-00-02319/2014-04 од 12.12.2014.	ЗАШТИТА ЖИВОТНЕ СРЕДИНЕ	Струковни инжењер заштите животне средине

Мастер студије *(II степен високог образовања)*

Број решења	СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ	Стручни назив - звање:
612-00-00862/2017-06 од 30.06.2017.	УПРАВЉАЊЕ ОТПАДОМ	Струковни мастер инжењер заштите животне средине
612-00-00077/2014-04 од 28.03.2014.	МУЛТИМЕДИЈАЛНЕ КОМУНИКАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ	Струковни мастер инжењер електотехнике и рачунарства

Специјалистичке студије *(II степен високог образовања)*

Број решења	СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ	Стручни назив - звање:
612-00-00077/2014-04 од 28.03.2014.	БЕЗБЕДНОСТ ДРУМСКОГ САОБРАЋАЈА	Специјалиста - струковни инжењер саобраћаја
612-00-00077/2014-04 од 14.02.2014.	КОМУНАЛНО ИНЖЕЊЕРСТВО	Специјалиста - струковни инжењер грађевинског инжењерства

Диплома

После завршетка студија, студенту се издају **диплома о стеченом високом образовању** и **додатак дипломи**. Диплома садржи назив и седиште високошколске установе, назив завршеног студијског програма, стечени степен високог образовања, стручни назив, постигнут број ЕСПБ бодова, просечну оцену као и друге прописане елементе. Додатак дипломи издаје се, на захтев носиоца дипломе, и на енглеском језику.


РЕПУБЛИКА СРБИЈА

ВИСОКА ТЕХНИЧКА ШКОЛА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА – НИШ

Оснивач: РЕПУБЛИКА СРБИЈА

Дозволу за рад број: од године издало је Министарство просвете Републике Србије, Београд

ДИПЛОМА

рођен-а године у

уписан-а школске године, а дана године завршио-ла је

основне струковне студије ПРВОГ СТЕПЕНА на студијском програму

обима 180 (сто осамдесет) бодова ЕСПБ

са просечном оценом ( ).

На основу тога издаје се ова диплома о стеченом ВИСОКОМ ОБРАЗОВАЊУ и стручном називу

године

У Нишу

Директор

ОС – 000000


Образац бр. 5

РЕПУБЛИКА СРБИЈА

ВИСОКА ТЕХНИЧКА ШКОЛА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА – НИШ

ДОДАТАК ДИПЛОМИ

Важи само уз диплому

број издату године

1. ПОДАЦИ О ИМАОЦУ ДИПЛОМЕ
1.1 Име:
1.2 Презиме:
1.3 Датум рођења:
1.4 Број индекса студента: ЈМБГ:

2. ПОДАЦИ О СТЕЧЕНОЈ ДИПЛОМИ
2.1 Стечени стручни назив:
2.2 Стручна област студија:
2.3 Назив и статус високошколске установе која издаје диплому:
ВИСОКА ТЕХНИЧКА ШКОЛА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА, самостална високошколска установа
2.4 Назив и статус високошколске установе која организује студије (уколико се разликује од 2.3):
Исто као под тачком 2.3
2.5 Језик на коме се одржава настава:
српски

3. ПОДАЦИ О ВРСТИ И СТЕПЕНУ СТУДИЈА
3.1 Врста и степен студија:
Основне струковне студије, први степен
3.2 Дужина трајања студија:
Три године (шест семестара)
3.3 Услови уписа:

4. ПОДАЦИ О САДРЖАЈУ И ПОСТИГНУТИМ РЕЗУЛТАТИМА
4.1 Начин студирања:
Студије нису завршене на даљину
4.2 Назив и циљеви студијског програма:
4.3 Видети следећу страну:
4.4 Начин оцењивања:

Оцена	Значење оцене	Број поена од	Број поена до
10	одличан	95	100
9	изузетно добар	85	94
8	врло добар	75	84
7	добар	65	74
6	довољан	55	64
5	није положио	0	54

4.5 Просечна оцена и успех:

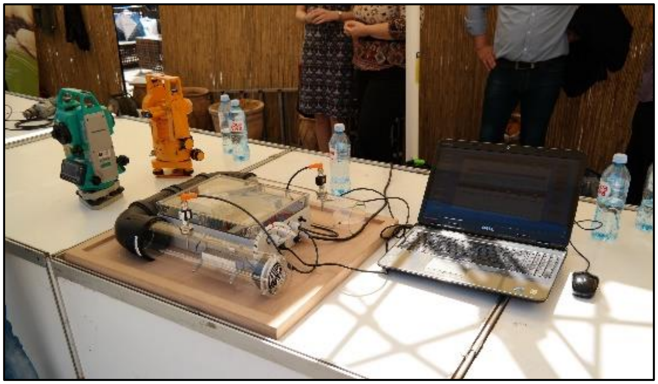
Дипломе ВТШ Ниш, су признате на тржишту рада, а у номенклатури националне службе запошљавања и тржишта рада наше дипломе се налазе:

1. Дипломе основних струковних студија, у нивоу су са дипломама академских студија са обимом од 180 ЕСПБ,
2. Дипломе специјалистичких и мастер струковних студија у рангу су са дипломама академских студија у обиму од 240-300 ЕСПБ. Наше дипломе признате су свуда у земљи и иностранству.

Простор и опрема

ВТШ Ниш вам нуди 1900 м^2, модерно опремљеног наставног и лабораторијског простора са свом потребном дидактичком опремом, као и рад са савременом мерном опремом, квалитетно наставно особље и знања потребна тржишту рада. Редовно пратимо и анализирамо све постигнуте резултате сваког студента и заједно планиамо њихову каријеру. То нас издваја од других високо образованих установа у земљи.

На располагању вам је универзитетска рачунарска мрежа са брзином интернета од 100 MBPS, која је део академске мреже Србије (АМРЕС), пет модерно опремљених рачунарских лабораторија са преко 140 рачунара последње генерације, као и пет инфо-пултова. Школа је претплатник MSDN AA програма, преко којег сви активни студенти, као и особље школе, имају могућност да **потпуно бесплатно** добију лиценцирани Microsoft-ов софтвер (Windows 10, Windows 8, Windows 7, Windows XP), као и поједине делове Microsoft Office пакета (Visio, Access, Project, Groove, OneNote) које могу користити искључиво у научно-образовне сврхе. Поред тога, омогућена је употреба специјализованих софтвера попут PC Crash. За потребе студената са департмана грађевинско инжењерство од компаније обезбеђене су едукационе лиценце за програме Radimpex Tower, ArmCAD i NormAG. Обезбеђујући снажне алате који су аутоматизовани,

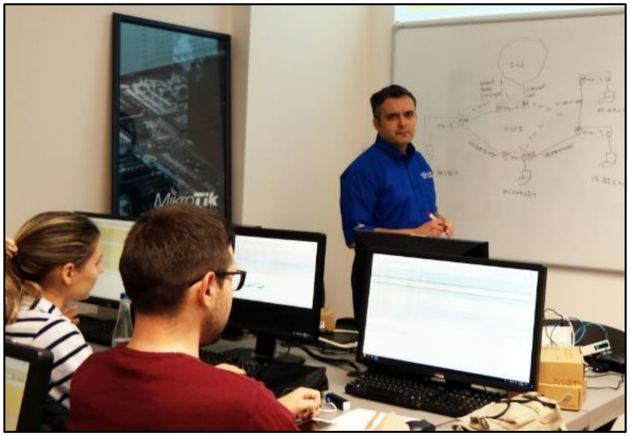


интегрисани, свеобухватни и интуитивани, омогућавају будућим - брзину и ефикасност пројектовања. Такође, на располагању, вам је и сервис EDURoam, који вам омогућава брз и једноставан приступ интернету широм света. Висока техничка школа струковних студија из Ниша се акредитована MikroTik академија. Поред тога, на располагању вам је и велика наставно стручна база наше установе са преко стотину успешних предузећа у којима можете да стичете практична знања и вештине.

Samsung Apps лабораторија је део дугорочног пројекта сарадње компаније Samsung и ВТШ у Нишу. Samsung је створио идеалне услове за учење како би студенти још у току студија били у могућности да самостално развијају напредне апликације за мобилне телефоне, а одмах након дипломирања били у могућности да се запосле у струци. Посебан програм рада са најбољи студентима даје већ годинама одличне резуалте и чини ВТШ Ниш препознатљивом у целој земљи, региону и шире.

ВТШ Ниша је акредитована Микро-Тик академија која својим студентима омогућава стицање индустријског сертификата MTCNA (MicroTik Certified Network Association) из области управљања и конфигурације активних мрежних уређаја компаније MikroTik.

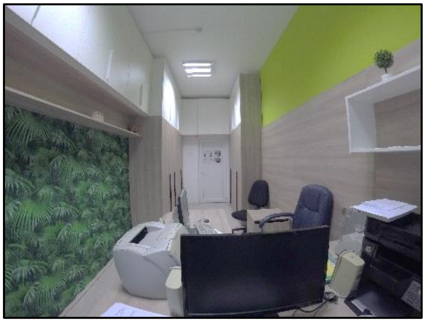
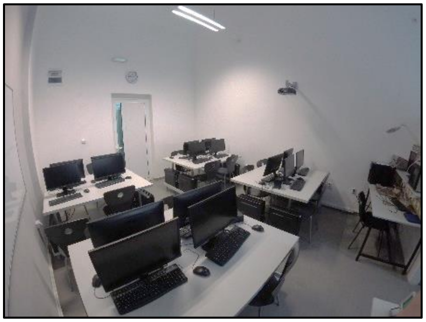
MikroTik сертификати представљају једну од најзначајнијих потврда знања и вештина у области управљања мрежне инфраструктуре чиме студенти ВТШ постају конкуретни на тржишту рада на позицијама систем администратор и систем мрежни инжењер.

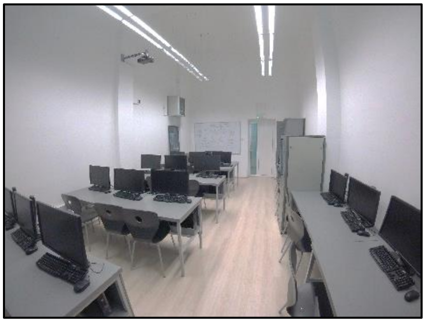


Лабораторија за заштиту животне средине отворена је у оквиру пројекта Ерасмус+ "WAMPPP" и опремљена је најсавременијим уређајима за испитивање параметара живо-тне средине (квалитет ваздуха, воде, земљи-шта), карактеристика отпада, припреме узо-рака итд. Лабораторија омогућује студентима стицање практичних знања из области испи-тивања животне средине, која одмах након за-вршетка студија могу применити у пракси. Лабораторија је део светске мреже LabExplorer.

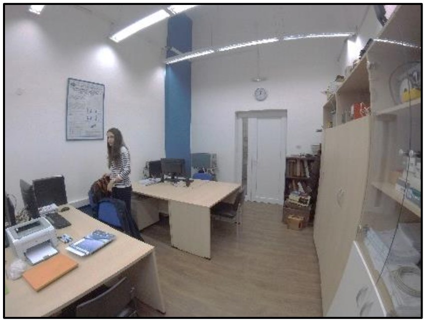
У оквиру Библиотеке налази се радни простор од 20 м^2, простор са књигама и читаоница од 33 м^2 са 20 радних места. У оквиру радног простора се налазе најновији бројеви часописа, приручници и енциклопедије, као и рачунари за потребе студената. Фонд библиотеке се састоји од уџбеника, помоћних уџбеника, практикума, приручника и енциклопедија. Библиотека располаже фондом књига са преко 5.000 библиотечких јединица. Библиотека ВТШ Ниш је прикључена на академску мрежу, преко које је могућ сталан приступ сервисима КоБСОН-а, као и сви наслови Универзитетске библиотеке.

ВТШ Ниш, перманентно улаже у своје развоје капацитете, а све у циљу да своји запосленим и студентима пружи услове за несметани рад и развој. Простор и опрема се сваке године модернизују и унапређују и тиме се стварају предуслови да студенти стичу нова и унапређују постојећа знања. Резултат тога је и већи степен запошљивости наших студената.
Поред тога, на располагању су вам и услуге службе студентске евиденције, техничке службе. Ту су и студенти ментори. Студенти ментори су подршка бруцошима у сваком смислу те речи, Студенти ментори заједно са својим професорима олакашаће вам почетак студирања и помоћи да заједно пребродимо све потенцијлане проблеме и тешкоће.
Од школске 2019/20, на располагању ће вам бити и услуге службе за каријерно вођење, која ће вам пружати услуге саветовања и развоја ваше каријере као би сте се што пре дошли до посла.








Студентска признања и награде

Наши студенти остварују значајне резултате у начном раду, као и у примени савремених технологија у областима које изучавају током студија. Неке од награда су:
-Прва награда у категорији студентских награда на 4 Форуму Напредних Технологија Ниш 2018.

- Прво место на јубиларној 10. Конференцији IEEESTEC 2017. са пројектом "Проширено реална и виртуелно реална`` IEEESTEC конференција";

- Награда за најбољу практичну реализацију на конференцији IEEESTEC 2014 са пројектом "VTŠ Access Control";

- Прво место на конференцији IEEESTEC 2013. са пројектом "VTŠ Explorer";

- Masterata за потребе Societe Generale банке;

- Хардверско-софтверског решења за прикупљање лименки и пластичних флаша, НИС у оквиру програма Заједници заједно.

Студентска пракса

Студентска пракса је обавезни део наставног процеса, и реализује се у земљи и иностранству, у фирмама и институцијама, са којим ВТШ Ниш има потписане уговоре о сарадњи. ВТШ Ниш сваком студенту обезбеђује ефикасну стручну праксу и могућност стицања практичних знања и искуства и коначно брзог запослења.

Да би тај циљ у потпуности остварали ВТШ Ниш анагажује предаваче ван радног односа, стручњаке из привреде са драгоценим исксутвом да помогну нашим студетнима у освајању знања, и стицања потребних вештина и спосбности

Наставно стручна база ВТШ Ниш садржи више од 150 успешних фирми из Ниша и региона, које помажу нашим студентима да се профилишу у успешне инжењере и брже се запосле. Сваке године наша база се шири а послодавци постају све задовољнији. На нивоу студијског програма одређује се координатор из редова наставника који прати реализацију стручне праксе и који са осталим наставницима прати ваш рад и помађе вам да успешно решавате све практичне задатке и проблеме који су саставни део наставног процеса.

ВТШ Ниш, је већ другу годину за редом са компанијом **Минг Ковачница ад.** Спроводи модел практичне наставе прилагођен интересовањима појединаца. Након праксе, врши се тестирање и студентима који остваре најбоље резултате компанија нуди запослење. Ова сарадња је препозната као пример добре праксе и студентима нуди стипендирања током завршне године, како би по завршетку студија одмах почели да раде у овој компанији.

Редовно, сваке године организују се стручне екскурзије за наше студенте у оквиру од којих се истичу: посете лабораторији Microsoft у Београду, Националној возачкој академији - НАВАК, РТС емисионој техници на, Авалском торњу, међународном сајму грађевинарства, сајмовима енергетске ефикасности и сл.
Поред, екскурзија и студијских посета, редовно учествујемо на сајмовима и фестивалима науке у земљи и региону.

Студентски парламент

Студентски парламент је орган Школе за остваривање права и заштите интереса студената. Броји 17 чланова који се бирају на непосредним, тајним изборима. Права и обавезе студентског парламента су регулисане Статутом и Правилником о раду студентског парламента. Студентски парламент има своје представнике у органима управљања и стручним органима.

Значајна улога студената је у обезбеђењу квалитета и остварује се кроз анкетирање студената о квалитету установе, студијских програма, наставе и условима рада. Оцена педагошког рада наставника и сарадника базира се на оце-ни добијеној анкетирањем.
Студентски парламент Школе, посебно је активан у реализацији стручних и волонтерских пракси, такмичења у научноистраживачким радовима. У сарадњи са Српским Ресорним Центром при Универзитету Г.В Шухов у Белгороду Русија, сваке године организује бесплатне курсеве руског језика.
Спортске активности су наш заштитни знак (фудбал, кошарка, стони тенис, шах). Редовни смо учесници универзитетске лиге.
Готово сваке године, наши студенти доносе победничке пехаре са спортских такмичења која се одржавају у оквиру "Сусрета високих школа струковних студија Србије.

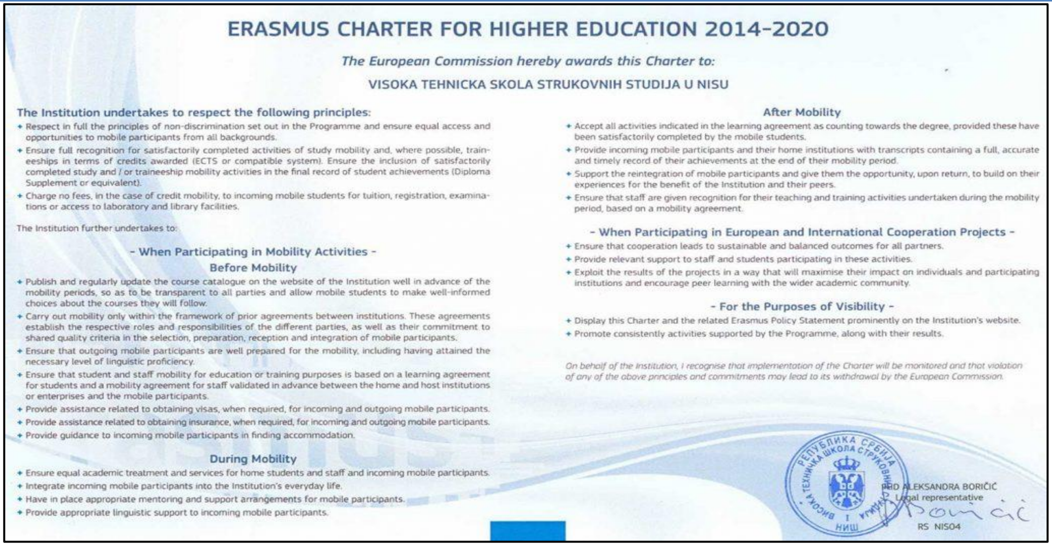
STUDENTSKI PARLAMENT VTŠSS
VTŠ
* NIŠ *

Међународна сарадња и студентска размена

2018. године, ВТШ Ниш је добила од стране Европске Комисије, **Повељу ЕРАСМУС +,** као потврду и награду за уложене напоре у развоју на пољу интернационализације. ВТШ има потписане уговоре о пословно техничкој сарадњи са Универзитетом Св. Климент Охридски из Битоља, Универзитетом у Марибору Република Словенија, Технолошким Универзитетом из Солуна и Државним Универзитетом из Белгорада В.Г. Шухов, Руска Федерација Основа развоја међународне сарадње јесте студентска мобилност, мобилност наставног особља и старатешки развој. ВТШ Ниш у протеклом периоду успешно је учествовала у реализацији неколико међународних пројеката који су имали за циљ јачање капацитета високо образовних установа.

Међународни пројекти у којима је учествовала ВТШ Ниш

- 517200-TEMPUS-1-2011-1-BETEMPUS -SMGR „Establishing and capacity building of the Southern Serbian Academy and the National Conference for Vocational Higher Education“;
- 517153-TEMPUS-1-2011-1-DETEMPUS-JPGR Conducting graduate surveys and improving alumni services for enhanced strategic management and quality improvement “CONGRAD“;
- TEMPUS 158781 „Occupational Safety and Health - degree curricula and lifelong learning“;
- 530577-TEMPUS-1-2012-1-RS-TEMPUS-JPCR Improvement of Product Development Studies in Serbia And Bosnia and Herzegovina;
- 561821-EPP-1-2015-1-RS-EPPKA2-CBHE-JP Waste management curricula development in partnership with public and private sector.
- 598551-EPP-1-2018-1-XK-EPPKA2-CBHE-JP Traffic safety in WB countires through curriculum innovation and development of undergraduate and masterstudies.


ERASMUS CHARTER FOR HIGHER EDUCATION 2014-2020

The European Commission hereby awards this Charter to:

VISOKA TEHNICKA SKOLA STRUKOVNIH STUDIJA U NISU

The Institution undertakes to respect the following principles:

- Respect in full the principles of non-discrimination set out in the Programme and ensure equal access and opportunities to mobile participants from all backgrounds.
- Ensure full recognition for satisfactorily completed activities of study mobility and, where possible, traineeships in terms of credits awarded (ECTS or compatible system). Ensure the inclusion of satisfactorily completed study and / or traineeship mobility activities in the final record of student achievements (Diploma Supplement or equivalent).
- Charge no fees, in the case of credit mobility, to incoming mobile students for tuition, registration, examinations or access to laboratory and library facilities.

The Institution further undertakes to:

- When Participating in Mobility Activities -

Before Mobility

- Publish and regularly update the course catalogue on the website of the Institution well in advance of the mobility periods, so as to be transparent to all parties and allow mobile students to make well-informed choices about the courses they will follow.
- Carry out mobility only within the framework of prior agreements between institutions. These agreements establish the respective roles and responsibilities of the different parties, as well as their commitment to shared quality criteria in the selection, preparation, reception and integration of mobile participants.
- Ensure that outgoing mobile participants are well prepared for the mobility, including having attained the necessary level of linguistic proficiency.
- Ensure that student and staff mobility for education or training purposes is based on a learning agreement for students and a mobility agreement for staff validated in advance between the home and host institutions or enterprises and the mobile participants.
- Provide assistance related to obtaining visas, when required, for incoming and outgoing mobile participants.
- Provide assistance related to obtaining insurance, when required, for incoming and outgoing mobile participants.
- Provide guidance to incoming mobile participants in finding accommodation.

During Mobility

- Ensure equal academic treatment and services for home students and staff and incoming mobile participants.
- Integrate incoming mobile participants into the Institution's everyday life.
- Have in place appropriate mentoring and support arrangements for mobile participants.
- Provide appropriate linguistic support to incoming mobile participants.

After Mobility

- Accept all activities indicated in the learning agreement as counting towards the degree, provided these have been satisfactorily completed by the mobile students.
- Provide incoming mobile participants and their home institutions with transcripts containing a full, accurate and timely record of their achievements at the end of their mobility period.
- Support the reintegration of mobile participants and give them the opportunity, upon return, to build on their experiences for the benefit of the Institution and their peers.
- Ensure that staff are given recognition for their teaching and training activities undertaken during the mobility period, based on a mobility agreement.

- When Participating in European and International Cooperation Projects -

- Ensure that cooperation leads to sustainable and balanced outcomes for all partners.
- Provide relevant support to staff and students participating in these activities.
- Exploit the results of the projects in a way that will maximise their impact on individuals and participating institutions and encourage peer learning with the wider academic community.

- For the Purposes of Visibility -

- Display this Charter and the related Erasmus Policy Statement prominently on the Institution's website.
- Promote consistently activities supported by the Programme, along with their results.

On behalf of the Institution, I recognise that implementation of the Charter will be monitored and that violation of any of the above principles and commitments may lead to its withdrawal by the European Commission.

РЕПУБЛИКА СРБИЈА ВИСОКА ТЕХНИЧКА ШКОЛА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА НИШ

PhD ALEKSANDRA BORIČIĆ
Legal representative

RS NIS04

Међународна сарадња и студентска размена

Као одговорна установа, дајемо активан допринос развоју друштва. Учествујемо на свим манифестацијама, које органиузује град, општина држава и сви други. Из једне такве сарадње произашао је и пројекат ``**Investment in the health and prosperity of youth in the Bulgaria Sebian region**`` у оквиру ИПА позива за 2016. Кроз овај пројекат добили смо технолошки парк са модерном инфраструктуром, први овакве врсте у земљи, која је студентима на располагању 24/7/365.

Сваке године крајем априла месеца, одржавамо ``Дан Отворених Врата`` намењен будућим студентима и средњошколцима. Том приликом ВТШ Ниш представља своје резулате и заједно са својим партенерима из привреде промовише своје вредности. Више стотина, средњошколаца из града Ниша и регоина, заједно са својим професорима, дружи са нама, нашим студентима, посећује радионице и предавања и упознаје се са нашим програмима, опремом, техничким капацитетима, нашим наставницима и сарадницима.

Наши студенти, равноправно са студентима других факултета учествују у раду бројних радионица попут радионица на тему „Паметних градова“ (GIZ), Наши студенти активно учествују у свим нашим активностима свим кампањама и манифестацијама које имају за циљ да поред стручних капацитета покажу и друштвену одговорност.

Редовно учествујемо у свим хуманиратним акцијама и поносни смо резулатаима које заједно са нашим студентима постижемо на том пољу.

Активни смо организатори и учесници Форума напредних технологија, где већ годинама представљамо своје резултате и степен техничке опремљености, а наши студенти освајају награде за студентски допринос развоју и примени напредних технологија о развоју Града Ниша. У 2018. години, формиран је и наш **FPV** (first person view) такмичарски тим. Циљ овог тима јеста да окупи заинтересоване студенте, да их упозна да новим технологијамаи спреми их за будуће изазове.

Пријава на конкурс

Уз пријаву на конкурс, кандидати подносе на увид **ОРИГИНАЛНА ДОКУМЕНТА и фотокопије ових докумената:**

♦ Диплому (сведочанство) о положеном завршном испиту,

♦ Сведочанства свих разреда средње школе,

♦ Доказ о уплати накнаде за полагање пријемног испита из математике на жиро рачун Школе:

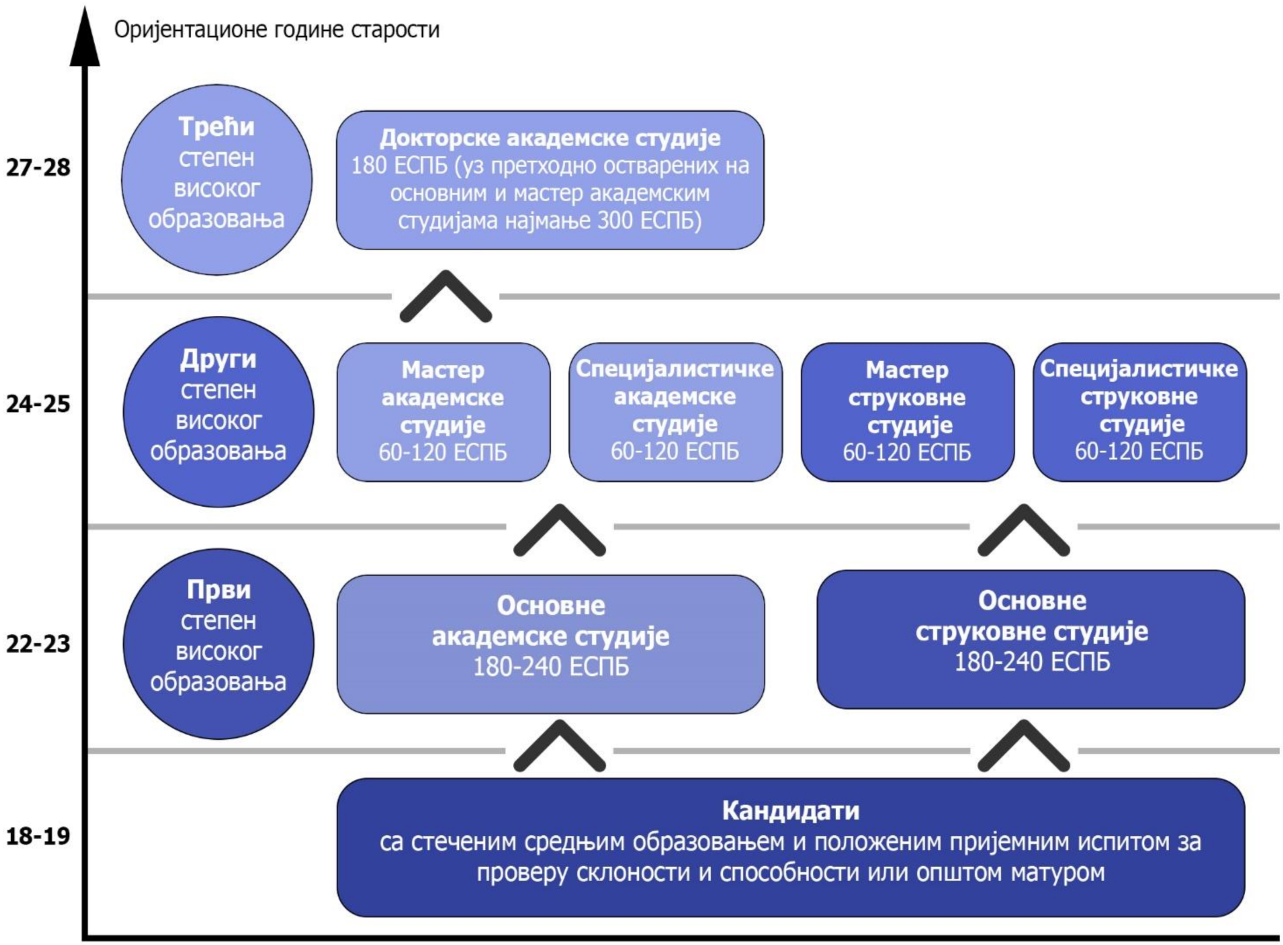
840-1758666-57
број модела 97
позив на број (одобрење) 94-126-100502041

При предаји докумената, кандидати се јављају студентској служби (канцеларија 109) која се налази на првом спрату.

Након предаје докумената кандидат добија **потврду о поднетој пријави, коју чува, ради уписа или подизања докумената.**

За све информације кандидати се могу обратити студентској служби (канцеларија 109) или телефоном на број 018/588 039 или на мејл upis@vtsnis.edu.rs.

СТУДИЈСКИ ПРОГРАМИ - КУРИКУЛУМИ



ОСНОВНЕ СТРУКОВНЕ СТУДИЈЕ

Студијски програм: Индустријско инжењерство

Распоред предмета по семестрима и годинама

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1	МАЈ 1.01	Математика 1	I	2	2	0	6
2	МЕЈ 1.02	Механика 1	I	2	3	0	7
3	ИНИ 1.08	Инжењерска информатика	I	2	0	2	6
4	СОР 1.04	Социологија рада	I	2	0	0	3
5	ТЕМ 1.05	Технички материјали	I	3	2	0	7
6	МАД 1.06	Математика 2	II	2	2	0	6
7	ТЕЈ 1.07	Технички енглески језик	II	2	2	0	4
8	ФИЗ 1.03	Физика	II	2	2	0	6
9	МЕД 1.09	Механика 2	II	3	3	0	8
10	ТЦН 1.10	Техничко цртање	II	2	3	0	7
ДРУГА ГОДИНА							
11	РАГ 1.11	Рачунарска графика	III	2	0	2	6
12	ОТМ 1.12	Отпорност материјала	III	2	2	0	5
13	ТЕР 1.13	Термоенергетика	III	2	2	0	6
14	ЕЛЕ 1.14	Електротехника са електроником	III	2	2	0	5
15	ОРП 1.15	Организација производње	III	2	2	0	4
16		Предмет изборног блока 1	III	2	0	0	4
17	СИК 1.16	Стандардизација и контрола квалитета	IV	2	2	0	5
18	ПТЈ 1.17	Производне технологије 1	IV	2	2	0	5
19	МАЕ 1.18	Машински елементи	IV	3	3	0	6
20	ТЕС 1.19	Технички системи	IV	2	2	0	5
21		Предмет изборног блока 2	IV	2	0	0	4
22		Предмет изборног блока 3	IV	2	2	0	5
ТРЕЋА ГОДИНА							
23	ПТД 1.20	Производне технологије 2	V	2	2	0	6
24	СМО 1.21	Савремене методе обраде	V	2	2	0	6
25	ОМС 1.22	Одржавање машинских система	V	3	2	0	6
26		Предмет изборног блока 4	V	2	2	0	6
27		Предмет изборног блока 4	V	2	2	0	6
28	ЦАМ 1.23	CAM системи	VI	3	3	0	5
29	СИП 1.24	Сензори и претварачи	VI	2	2	0	5
30		Предмет изборног блока 5	VI	3	2	0	5
31		Предмет изборног блока 5	VI	3	2	0	5
32	СТП 1.32	Стручна пракса	VI				3
33	ЗАР 1.31	Завршни рад	VI				7
						Укупно ЕПСБ	**180**

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1	БИЗ 1.27	Безбедност и здравље на раду	2	0	0	4
2	КИЗ 1.28	Корозија и заштита материјала	2	0	0	4
3	ОРА 1.29	Одрживи развој	2	0	0	4
Предмети изборног блока 2.						
1	ОСМ 1.30	Основе менаџмента	2	0	0	4
2	ПОК 1.31	Пословне комуникације	2	0	0	4
3	МЕК 1.32	Менаџмент кадрова	2	0	0	4
Предмети изборног блока 3.						
1	ТРИ 1.33	Теорија ризика	2	2	0	5
2	ТСД 1.34	Технике спајања делова	2	2	0	5
3	МЕП 1.35	Механизација претовара	2	2	0	5
Предмети изборног блока 4.						
1	ЕИО 1.36	Енергија и околина	2	2	0	6
2	АИП 1.37	Алати и прибори	2	2	0	6
3	РЗП 1.38	Развој производа	2	2	0	6
4	ХПС 1.39	Хидраулички и пнеуматски системи	2	2	0	6
Предмети изборног блока 5.						
1	РЕТ 1.40	Рециклажне технологије	3	2	0	5
2	ИСУ 1.41	Интегрисани системи управљања	3	2	0	5
3	УОТ 1.42	Управљање отпадом	3	2	0	5
4	КГХ 1.43	КГХ системи	3	2	0	5

Напомена:
- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;
- за предмет стручна пракса студент бира један од предмета из групе стручно-апликативних предмета;
- завршни рад се ради по правилу из групе стручно-апликативних предмета.

Савладавањем овог студијског програма студенти стичу следеће компе-тенције:

- да прикупљају, анализирају и систематизују теоретске и практичне проблеме из инжењерске праксе и да предвиде решења и последице при решавању тих проблема,
- да владају основним дисциплинама у области индустријског инже-њерства, као и савременим информационим технологијама на нивоу који се очекује од инжењера овог типа и у земљама ЕУ,
- да користе литературу и инжењерске алате за прорачуне, моде-лирање, симулацију, а све у циљу овладавања знањима из овог подручја,
- да примењују инжењерске, организационе и административне мере за безбедан рад са машинама, уређајима и опремом.

Студијски програм: Друмски саобраћај

Распоред предмета по семестрима и годинама

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1	МАЈ 2.01	Математика 1	I	2	2	0	**6**
2	МЕЈ 2.02	Механика 1	I	2	3	0	**7**
3	ИНФ 2.08	Инжењерска информатика	I	2	1	1	**6**
4	СОР 2.04	Социологија рада	I	2	0	0	**3**
5	ТЕМ 2.05	Технички материјали	I	3	1	1	**7**
6	МАД 2.06	Математика 2	II	2	2	0	**6**
7	ТЕЈ 2.07	Технички енглески језик	II	2	2	0	**4**
8	ФИЗ 2.03	Физика	II	2	1	1	**6**
9	МЕД 2.09	Механика 2	II	3	3	0	**8**
10	ТЦН 2.10	Техничко цртање	II	2	3	0	**7**
ДРУГА ГОДИНА							
11	ЕЛЕ 2.14	Електротехника са електроником	III	2	1	1	**5**
12	РАГ 2.11	Рачунарска графика	III	2	1	1	**6**
13	ПИТ 2.13	Паркирање и терминали у друм. саобр.	III	3	4	0	**8**
14	МЕП 2.12	Механизација претовара	III	2	2	0	**5**
15		Предмет изборног блока 1	III	2	2	0	**6**
16	ПУТ 2.16	Путеви	IV	2	2	0	**6**
17	МОВ 2.15	Моторна возила	IV	3	2	0	**7**
18	БЕС 2.17	Безбедност саобраћаја	IV	3	3	0	**8**
19	ЕТС 2.18	Елементи транспортних средстава	IV	3	2	0	**6**
20		Предмет изборног блока 2	IV	2	0	0	**3**
ТРЕЋА ГОДИНА							
21	ТДС 2.19	Технологија друмског саобраћаја	V	3	4	0	**8**
22	ТБК 2.20	Техника безбедности и контроле саобр.	V	3	4	0	**8**
23		Предмет изборног блока 3	V	3	3	0	**7**
24		Предмет изборног блока 3	V	3	3	0	**7**
25	ЈГП 2.22	Јавни градски превоз	VI	3	4	0	**8**
26	ТРС 2.21	Теорија и регулисање саобр. токова	VI	3	4	0	**8**
27		Предмет изборног блока 4	VI	3	3	0	**7**
28	СПР 2.23	Стручна пракса	VI				**3**
29	ЗАР 2.24	Завршни рад	VI				**7**
						Укупно ЕПСБ	**183**

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1	МУС 2.25	Менаџмент у саобраћају	2	2	0	**6**
2	САП 2.26	Саобраћајна психологија	2	2	0	**6**
Предмети изборног блока 2.						
1	ОСМ 2.27	Основе менаџмента	2	0	0	**3**
2	ПОК 2.28	Пословне комуникације	2	0	0	**3**
3	МЕК 2.29	Менаџмент кадрова	2	0	0	**3**
Предмети изборног блока 3.						
1	МТШ 2.30	Међународни транспорт и шпедиција	3	3	0	**7**
2	ДИВ 2.33	Динамика возила	3	3	0	**7**
3	БИВ 2.32	Бука и вибрације у радној и животној средини	3	3	0	**7**
4	ПЛС 2.31	Планирање саобраћаја	3	3	0	**7**
Предмети изборног блока 4.						
1	КТР 2.34	Комбиновани транспорт	3	3	0	**7**
2	ЕМВ 2.35	Експлоатација и одржавање моторних возила	3	3	0	**7**

Напомена:
- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;
- за предмет стручна пракса студент бира један од предмета из групе стручно-апликативних предмета;
- завршни рад се ради по правилу из групе стручно-апликативних предмета.

Савладавањем, овог студијског програма, студенти су способни да решавају практичне проблеме из праксе саобраћајног инжењерства и стичу следеће компетенције:

- Анализа и превенција саобраћајних незгода, анализа система обуке возача, предлагање мера и акција за повећање безбедности саобраћаја,
- Планирање мобилности, решавање проблема паркирања у урбаним срединама, анализа саобраћајних токова и пројектовање саобраћајне сигнализације,
- Организација рада у путничком у теретном саобраћају,
- Праћење робних токова у међународном робном промету, органи-зовање транспорта применом модерних технологија комбинованог транспорта.

Студијски програм: Комуникационе технологије

Распоред предмета по семестрима и годинама

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	МАТ1 3.01	Математика 1	I	2	2	0	**6**
2.	ЕТ1 3.02	Основи електротехнике 1	I	3	3	0	**8**
3.	ФИЗ 3.03	Физика	I	2	1	1	**6**
4.	АСП 3.04	Алгоритми и структуре података	I	2	2	0	**6**
5.		Предмет изборног блока 1	I	2	0	0	**4**
6.	ОРТ 3.07	Основи рачунарске технике	II	2	2	0	**6**
7.	ОСЕ 3.06	Основи електронике	II	2	1	1	**6**
8.	ОСП 3.27	Основи програмирања	II	2	1	1	**6**
9.	МАТ2 3.26	Математика 2	II	2	2	0	**6**
10.		Предмет изборног блока 2	II	2	2	0	**6**
ДРУГА ГОДИНА							
11.	ДИЕ 3.10	Дигитална електроника	III	2	1	1	**6**
12.	ДИТ 3.09	Дигиталне телекомуникације	III	2	2	1	**7**
13.	РАМ 3.11	Рачунарске мреже	III	2	1	1	**6**
14.		Предмет изборног блока 3	III				**4**
15.		Предмет изборног блока 4	III				**6**
16.	КТС 3.12	Кабловски ТК системи	IV	2	2	1	**7**
17.	ЕМИ 3.14	Електронска мерна инструментација	IV	2	1	1	**6**
18.	МРС 3.13	Мрежни сервиси	IV	2	1	1	**6**
19.		Предмет изборног блока 5	IV				**6**
20.		Предмет изборног блока 5	IV				**6**
ТРЕЋА ГОДИНА							
21.	ЕНГ2 3.15	Технички енглески 2	V	2	2	0	**4**
22.	МОК 3.16	Мобилне комуникације	V	2	2	0	**6**
23.	ДТВ 3.17	Дигитални ТВ системи	V	2	2	0	**6**
24.	ММС 3.18	Мултимедијални сигнали и системи	V	2	2	0	**6**
25.		Предмет изборног блока 6	V				**6**
26.	БТК 3.19	Бежични телекомуникациони системи	VI	3	2	1	**6**
27.	ЗПМ 3.20	Заштита података у комуникац. мрежама	VI	2	2	1	**6**
28.	АНС 3.21	Антенски системи	VI	2	2	1	**6**
29.		Предмет изборног блока 7	VI				**5**
30.	СТП 3.22	Стручна пракса					**3**
31.	ЗАВ 3.23	Завршни рад					**6**
						Укупно ЕПСБ	**180**

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1.	СОР 3.24	Социологија рада	2	0	0	4
2.	ПОК 3.25	Пословне комуникације	2	0	0	4
Предмети изборног блока 2.						
3.	ЕТ2 3.08	Основи електротехнике 2	2	2	0	6
4.	ОСТ 3.05	Основи телекомуникација	2	2	0	6
Предмети изборног блока 3.						
3.	ЕНГ1 3.28	Технички енглески 1	2	2	0	4
4.	МЕК 3.29	Менаџмент кадрова	2	0	0	4
Предмети изборног блока 4.						
1.	АПР 3.30	Архитектура персоналних рачунара	2	0	2	6
2.	БАП 3.31	Базе података	2	1	1	6
3.	ПШК 3.32	Пројектовање штампаних кола	2	1	1	6
4.	КОС 3.33	Комутациони системи	2	2	0	6
Предмети изборног блока 5.						
1.	АРМ 3.34	Администрирање рачунарских мрежа	2	1	1	6
2.	ООП 3.35	Објектно оријентисано програмирање	2	1	1	6
3.	МКС 3.38	Микрорачунарски системи	2	1	1	6
4.	ТЕМ 3.36	Телекомуникационе мреже	2	2	0	6
5.	ППР 3.37	Пројектовање помоћу рачунара	2	1	1	6
Предмети изборног блока 6.						
1	КУД 3.39	Квалитет услуга дигиталних комуникац. мрежа	2	2	0	6
2.	ВПР 3.41	Веб програмирање	2	1	1	6
3.	СКО 3.40	Сателитске комуникације	2	2	0	6
Предмети изборног блока 7.						
1	ИПТ 3.42	ИП телефонија	2	1	1	5
2.	АБП 3.43	Администрирање база података	2	1	1	5
3.	ОПТ 3.44	Оптоласерска техника	2	1	1	5
4.	ЕАК 3.45	Електроакустика	2	2	0	5

Савладавањем овог студијског програма студент стиче следеће компе-тенције:

- да пројектује и одржава телекомуникационе системе, сателитску и кабловску опрему,
- да пројектује, изгради и одржава кабловске дистрибуиране системе, кућне информационе системе, Интернет систем и GPS (Global Position System) системе,
- да пројектује, примени, одржава бежичне мобилне комуникације, рачунарске мреже, аудио, видео и опрему за надзор и заштиту објеката.

Студијски програм: Савремене рачунарске технологије

Распоред предмета по семестрима и годинама

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	МАТ1 4.01	Математика 1	I	2	2	0	**6**
2.	ЕТ1 4.02	Основи електротехнике 1	I	3	3	0	**8**
3.	ФИЗ 4.03	Физика	I	2	1	1	**6**
4.	АСП4.04	Алгоритми и структуре података	I	2	2	0	**6**
5.		Предмет изборног блока 1	I	2	0	0	**4**
6.	ОРТ4.07	Основи рачунарске технике	II	2	2	0	**6**
7.	ОСЕ4.06	Основи електронике	II	2	1	1	**6**
8.	ОСП4.05	Основи програмирања	II	2	1	1	**6**
9.	МАТ24.08	Математика 2	II	2	2	0	**6**
10.		Предмет изборног блока 2	II	2	2	0	**6**
ДРУГА ГОДИНА							
11.	ОПС 4.09	Оперативни системи	III	2	2	1	**7**
12.	БАП 4.10	Базе података	III	2	1	1	**6**
13.	ИНТ 4.11	Интернет технологије	III	2	1	2	**7**
14.		Предмет изборног блока 3	III	2	2	0	**4**
15.		Предмет изборног блока 4	III	2	1	1	**6**
16.	ООП 4.12	Објектно оријентисано програмирање	IV	2	1	1	**6**
17.	МКС 4.13	Микрорачунарски системи	IV	2	1	1	**6**
18.	ВЕБ 4.14	Веб дизајн	IV	2	0	2	**6**
19.		Предмет изборног блока 5	IV	2	1	1	**6**
20.		Предмет изборног блока 5	IV	2	1	1	**6**
ТРЕЋА ГОДИНА							
21.	ЕНГ2 4.15	Технички енглески 2	V	2	2	0	**4**
22.	НЕТ 4.16	НЕТ технологије	V	2	0	2	**6**
23.	АМК 4.17	Архитектура микроконтролера	V	2	1	1	**6**
24.	КСС 4.18	Клијент сервер системи	V	2	1	1	**6**
25.		Предмет изборног блока 6	V	2	1	1	**6**
26.	ЕЛП 4.19	Електронско пословање	VI	2	1	1	**6**
27.	РМК 4.20	Примена микроконтролера	VI	2	2	1	**6**
28.	СОИ 4.21	Софтверско инжењерство	VI	3	2	1	**7**
29.		Предмет изборног блока 7	VI	2	1	1	**5**
30.	ЗАР 4.23	Завршни рад					**6**
31.	СТП 4.22	Стручна пракса					**3**
						Укупно ЕПСБ	**181**

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1.	СОР4.24	Социологија рада	2	0	0	**4**
2.	ПОК4.25	Пословне комуникације	2	0	0	**4**
Предмети изборног блока 2.						
1.	ЕТ2 4.26	Основи електротехнике 2	2	2	0	**6**
2.	ОСТ4.27	Основи телекомуникација	2	2	0	**6**
Предмети изборног блока 3.						
1.	ЕНГ1 4.28	Технички енглески 1	2	2	0	**4**
2.	МЕК 4.29	Менаџмент кадрова	2	0	0	**4**
Предмети изборног блока 4.						
1.	РАМ 4.30	Рачунарске мреже	2	1	1	**6**
2.	ВБА 4.33	ВБА програмирање	2	1	1	**6**
3.	ПШК 4.32	Пројектовање штампаних кола	2	1	1	**6**
4.	ДИЕ 4.31	Дигитална електроника	2	1	1	**6**
Предмети изборног блока 5.						
1.	МРС 4.34	Мрежни сервиси	2	1	1	**6**
2.	ВЕГ 4.37	Векторска графика	2	2	0	**6**
3.	АРМ 4.38	Администрирање рачунарских мрежа	2	1	1	**6**
4.	ППР 4.35	Пројектовање помоћу рачунара	2	1	1	**6**
5.	ЕМИ 4.36	Електронска мерна инструментација	2	1	1	**6**
6.	ТЕМ 4.39	Телекомуникационе мреже	2	2	0	**6**
Предмети изборног блока 6.						
1.	НСП 4.42	Напредне структуре података	2	1	1	**6**
2.	ВПР 4.40	Веб програмирање	2	1	1	**6**
3.	МКИ 4.41	Микроконтролери и интерфејси	2	1	1	**6**
Предмети изборног блока 7.						
1.	АБП 4.43	Администрирање база података	2	1	1	**5**
2.	ПМУ 4.44	Програмирање мобилних уређаја	2	1	1	**5**
3.	ОПТ 4.45	Оптоласерска техника	2	1	1	**5**
4.	СЗП4.46	Сензори и претварачи	2	2	0	**5**

Напомена:

- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;
- за предмет стручна пракса студент бира један од предмета из групе стручно-апликативних предмета;
- завршни рад се ради по правилу из групе стручно-апликативних предмета.

Савладавањем овог студијског програма студент стиче следеће компетенције:

- да програмира апликације,
- да пројектује, креира и одржава базе података,

- да пројектује и администрира рачунарске мреже,
- да инсталира, подешава и одржава рачунарску и мрежну опрему,
- да програмира на WEB –у,
- да програмира мобилне уређаје,
- да програмира микроконтролере,
- да повезује и контролише различите уређаје путем рачунара.

Студијски програм: Грађевинско инжењерство

Распоред предмета по семестрима и годинама

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	МА1 5.01	Математика 1	I	2	2	0	**6**
2.	СОР 5.02	Социологија рада	I	2	0	0	**3**
3.	ФИЗ 5.03	Физика	I	2	2	0	**6**
4.	ЕНГ 5.04	Технички енглески језик	I	2	2	0	**4**
5.	ТЕМ 5.05	Техничка механика	I	2	3	0	**6**
6.	НАГ 5.06	Нацртна геометрија	I	2	3	0	**6**
7.	ГРК 5.07	Грађевинске конструкције	II	2	2	0	**6**
8.	ГЕО 5.08	Геодезија	II	3	2	0	**6**
9.	ГМ1 5.09	Грађевински материјали 1	II	2	3	0	**6**
10.	РАТ 5.10	Рачунарска техника	II	2	0	2	**5**
11.	МА2 5.11	Математика 2	II	2	2	0	**6**
ДРУГА ГОДИНА							
12.	СТК 5.12	Статика конструкција	III	2	3	0	**6**
13.	ГМТ 5.13	Грађевинска механизација и тех. грађења	III	2	2	0	**6**
14.	РАГ 5.14	Рачунарска графика	III	2	0	2	**6**
15.	ОТМ 5.15	Отпорност материјала	III	2	2	0	**5**
16.		Предмет изборног блока 1	III	2	2	0	**5**
17.		Предмет изборног блока 2	III	2	0	0	**4**
18.	БЕК 5.16	Бетонске конструкције	IV	2	4	0	**7**
19.	ХИД 5.17	Хидротехника	IV	2	3	0	**6**
20.	СА1 5.18	Саобраћајнице 1	IV	3	2	0	**6**
21.		Предмет изборног блока 3	IV	2	0	0	**4**
22.		Предмет изборног блока 4	IV	3	2	0	**5**
ТРЕЋА ГОДИНА							
23.	МЕТ 5.19	Механика тла и фундирање	V	3	2	0	**6**
24.	СА2 5.20	Саобраћајнице 2	V	3	2	0	**6**
25.	ОРГ 5.21	Организација радова у грађевин. са менаџ.	V	2	4	0	**7**
26		Предмет изборног блока 5	V	2	2	0	**5**
27.		Предмет изборног блока 6	V	2	2	0	**6**
28	ЗРИ 5.22	Завршни радови и инсталације	VI	2	4	0	**6**
29.	ЕЕФ 5.23	Енергетска ефикасност у зградарству	VI	3	3	0	**5**
30.	УПЛ 5.24	Урбанистичко планирање	VI	3	2	0	**5**
31.		Предмет изборног блока 7	VI	2	0	0	**4**
32.	СТП 5.25	Стручна пракса	VI				**3**
33.	ДИП 5.26	Завршни рад	VI				**7**
						Укупно ЕСПБ	**180**

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
		Предмети изборног блока 1.				
1.	ЕКИ 5.27	Еколошко инжењерство	2	2	0	**5**
2.	ГРМ 5.28	Грађевински материјали 2	2	2	0	**5**
		Предмети изборног блока 2.				
1.	УЖР 5.29	Управљање животним ресурсима	2	0	0	**4**
2.	БИЗ 5.30	Безбедност и здравље на раду	2	0	0	**4**
		Предмети изборног блока 3.				
1.	МЕК 5.31	Менаџмент кадрова	2	0	0	**4**
2.	ПОК 5.32	Пословне комуникације	2	0	0	**4**
		Предмети изборног блока 4.				
1.	КГХ 5.33	КГХ системи	3	2	0	**5**
2.	ТДМ 5.34	3Д моделовање	3	2	0	**5**
		Предмети изборног блока 5.				
1.	ИНС 5.35	Информациони системи	2	2	0	**5**
2.	СОГ 5.36	Софтвери у грађевинарству	2	2	0	**5**
		Предмети изборног блока 6.				
1.	ПРО 5.37	Пројектовање објеката високоградње	2	2	0	**6**
2.	ДМК 5.38	Дрвене и металне конструкције	2	2	0	**6**
		Предмети изборног блока 7.				
1.	РЕГ 5.39	Регулатива у грађевинарству	2	0	0	**4**
2.	УКВ 5.40	Управљање квалитетом и вредносно инжењерство	2	0	0	**4**

Напомена:
- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;
- за предмет стручна пракса студент бира један од предмета из групе стручно-апликативних предмета;
- завршни рад се ради по правилу из групе стручно-апликативних предмета.

Савладавањем овог студијског програма студент стиче следеће компе-тенције:

- да користи релевантне материјале при извођењу грађевинских објеката,
- да користи рачунарске технологије у циљу примене практичних знања ради пројектовања у грађевинарству,
- да користи одговарајућу опрему, примени нове технологије у грађевинарству,
- да руководи појединим фазама радова у оквиру високоградње, нискоградње и хидроградње
- да обавља инспекцијске послове у органима локалне самоуправе,
- да пројектује поједине фазе у оквиру израде идејног и главног пројекта.

Студијски програм: Заштита животне средине

Распоред предмета по семестрима и годинама студија

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе			ЕСПБ
				ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	МАЈ 6.01	Математика 1	I	2	2	0	**6**
2.	УПЗ 6.02	Уводни принципи заштите животне средине	I	3	2	0	**7**
3.	ИНИ 6.08	Инжењерска информатика	I	2	1	1	**6**
4.	СОР 6.04	Социологија рада	I	2	0	0	**3**
5.	ТЕМ 6.05	Технички материјали	I	3	2	0	**7**
6.	МАД 6.06	Математика 2	II	2	2	0	**6**
7.	ТЕЈ 6.07	Технички енглески језик	II	2	2	0	**4**
8.	ФИЗ 6.03	Физика	II	2	2	0	**6**
9.	ТМЕ 6.09	Техничка механика	II	3	2	0	**8**
10.	ТЦН 6.10	Техничко цртање	II	2	3	0	**7**
ДРУГА ГОДИНА							
11.	ОРА 6.12	Одрживи развој	III	2	2	0	**5**
12.	ЕТП 6.11	Еко стандарди и технички прописи	III	2	0	0	**4**
13.	СИА 6.17	Статистика и анализа	III	2	2	0	**5**
14.	ТЕР 6.15	Термоенергетика	III	2	2	0	**6**
15.	ЕЛЕ 6.14	Електротехника са електроником	III	2	2	0	**5**
16.		Предмет изборног блока 1.	III	2	2	0	**6**
17.	АИЕ 6.18	Алтернативни извори енергије	IV	2	2	0	**6**
18.	ЕЕФ 6.16	Енергетска ефикасност	IV	2	2	0	**6**
19.	МКП 6.13	Мерење и контрола параметара жив. средине	IV	2	2	0	**5**
20.	ЕИО 6.19	Енергија и околина	IV	2	3	0	**6**
21.		Предмет изборног блока 2.	IV	2	0	0	**3**
22.		Предмет изборног блока 2.	IV	2	0	0	**3**
ТРЕЋА ГОДИНА							
23.	ГЖС 6.21	Грађитељство и животна средина	V	2	2	0	**5**
24.	ПУТ 6.22	Процена утицаја на животну средину	V	2	2	0	**4**
25.	УПО 6.20	Управљање отпадом	V	2	2	0	**5**
26.		Предмет изборног блока 3.	V	2	2	0	**6**
27.		Предмет изборног блока 3	V	2	2	0	**6**
28.	ОМС 6.23	Системи заштите животне средине	VI	3	2	0	**6**
29.	РЕТ 6.24	Рециклажне технологије	VI	2	3	0	**6**
30.		Предмет изборног блока 4.	VI	2	3	0	**6**
31.		Предмет изборног блока 4.	VI	2	3	0	**6**
32.	СПР 6.25	Стручна пракса	VI	0	0	3	**3**
33.	ЗАР 6.26	Завршни рад	VI	0	0	6	**7**
						Укупно ЕСПБ	**180**

Изборна настава

	Шифра предмета	Назив предмета	Часови активне наставе			ЕСПБ
			ПРЕД	ВЕЖ	ДОН	
Предмети изборног блока 1.						
1.	КЗМ 6.28	Корозија и заштита материјала	2	2	0	6
2.	МИК 6.27	Мерење и контрола параметара радне средине	2	2	0	6
Предмети изборног блока 2.						
1.	УЖР 6.32	Управљање животним ресурсима	2	0	0	3
2.	МЕК 6.29	Менаџмент кадрова	2	0	0	3
3.	ПОК 6.31	Пословне комуникације	2	0	0	3
4	БЗР 6.30	Безбедност и здравље на раду	2	0	0	3
Предмети изборног блока 3.						
1.	ИЕК 6.33	Индустријска екологија	2	2	0	6
2.	ЕМС 6.34	Систем менаџмента заштитом животне средине	2	2	0	6
3.	ЕКД 6.35	Еко дизајн	2	2	0	6
4	ИНС 6.36	Информациони системи	2	2	0	6
Предмети изборног блока 4.						
1.	ЗГП 6.37	Зрачење и глобалне промене	2	3	0	6
2.	БИВ 6.39	Бука и вибрације у радној и животној средини	2	3	0	6
3.	ТЕР 6.38	Теорија ризика	2	3	0	6
4.	ОДИ 6.40	Обновљиви дисперзни извори напајања	2	3	0	6

Напомена:
- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;
- за предмет стручна пракса студент бира један од предмета из групе стручно-апликативних предмета;
- завршни рад се ради по правилу из групе стручно-апликативних предмета.

Савладавањем овог студијског програма студент стиче следеће компетенције:

- да прикупљају, анализирају и систематизују теоретске и практичне проблеме из области заштите животне средине и да предвиде решења и последице при решавању тих проблема,
- да примењују законе и прописе, у складу са светским, привредним и друштвеним развојем, као и са принципима заштите животне средине,
- да владају основним дисциплинама у области просторног планирања, као и заштите животне средине и савременим информационим технологијама,
- да пројектују поједине фазе у оквиру израде идејног и главног пројекта у области просторног планирања.

СПЕЦИЈАЛИСТИЧКЕ СТРУКОВНЕ СТУДИЈЕ

Студијски програм: Безбедност друмског саобраћаја

Последњих година на светском нивоу рад у области безбедности друмског саобраћаја доживљава велику експанзију. На свим нивоима организовања покушава се ефикасном организацијом и прерасподелом рада остварити што бољи резултат на смањењу броја саобраћајних незгода и њихових последица. Узимајући у обзир број саобраћајних незгода и штетност њихових последица, организација и рад у области безбедности друмског саобраћаја заузима значајно место у хијерархији приоритетних задатака савременог друштва. Успостављање прихватљивог нивоа, односно жељеног стања, безбедности друмског саобраћаја подразумева, између осталог и константно унапређење образовања и стечених знања стручњака из ове области, што уједно представља основни циљ студијског програма.

КУРИКИЛУМ

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе	ЕСПБ
		ПРВА ГОДИНА			
1	ДМВ 2.41	Динамика моторних возила	I	4+3+0+0	**7**
2	АБС 2.42	Анализа безбедности саобраћаја	I	4+3+0+0	**7**
3	ЕСН 2.43	Експертиза саобраћајних незгода	I	4+3+0+0	**7**
4		Изборни предмет 1	II	3+4+0+0	**7**
5		Изборни предмет 2	II	3+4+0+0	**7**
6		Изборни предмет 3	II	3+4+0+0	**7**
7	СИР 2.48	Струковни инжењерски рад	II		**3**
8	СПР 2.49	Специјалистички рад	II		**15**
				Укупно ЕСПБ	**60**

Листа изборних предмета

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе	ЕСПБ
		ПРВА ГОДИНА			
1	ТКР 2.44	Техника контроле саобраћаја	II	3+4+0+0	**7**
2	ТРЦ 2.45	Технологија рада центра за обуку возача	II	3+4+0+0	**7**
3	ЕОП 2.46	Експлоатација и одржавање путева	II	3+4+0+0	**7**
4	ПОМ 2.47	Превентива и контрола у транспорту опасних материја	II	3+4+0+0	**7**

Напомена:
- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;

Студијски програм: Комунално инжењерство

Циљ студијског програма је образовање стручњака из области грађевинског инжењерства и оспособљење за рад у разнородним и динамичним подручјима ове области. Студијски програм конципиран је тако да студенте
припреми за пројектовање грађевинских објеката и учешће у реализацији пројеката на изградњи објеката комуналне инфраструктуре. Студенти стичу
компетенције да самостално и у тимском раду обављају различите послове у фазама пројектовања и извођења објеката, и оспособљавају се за решавање проблема који настати у току израде и реализације грађевинских пројеката.

КУРИКИЛУМ

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе	ЕСПБ
ПРВА ГОДИНА					
1	УРЕ 5.01	Урбана екологија	I	4+3+0+0	**7**
2	ПГС 5.02	Пројектовање градских саобраћајница	I	4+3+0+0	**7**
3	УЕЗ 5.03	Одрживи развој комуналних средина	I	4+3+0+0	**7**
4		Изборни предмет 1	II	3+4+0+0	**7**
5		Изборни предмет 2	II	3+4+0+0	**7**
6		Изборни предмет 3	II	3+4+0+0	**7**
7	СИР 5.18	Струковни инжењерски рад	II	0+0+45	**3**
8	СПР 5.19	Специјалистички рад	II	0+0+120	**15**
				Укупно ЕСПБ	**60**

Листа изборних предмета

	Шифра предмета	Назив предмета	Сем.	Часови активне наставе	ЕСПБ
ПРВА ГОДИНА					
1	НРП 5.14	Нормативна регулатива о планирању и изградњи	II	3+4+0+0	**7**
2	ПГС 5.15	Планирање грађење и одржавање градских саобраћајница	II	3+4+0+0	**7**
3	МИП5.16	Методологија израде стручних пројеката и примењених истраживања	II	3+4+0+0	**7**
4	УПП 5.17	Управљање пројектима	II	3+4+0+0	**7**

Напомена:
- студент бира потребан број изборних предмета да би остварио најмање 60 ЕСПБ по години студија;

МАСТЕР СТРУКОВНЕ СТУДИЈЕ

Закон о Високом образовању дозволио је струковним школама да развију курикулуме којима ће будући студенти стећи диплому мастера струковних студија.

Програм на мастер студијама је организован тако да се наставља након основних студија. После стицања дипломе струковног инжењера у трајању од 3 године и са остварених 180 ЕСПБ бодова, студенти могу да наставе студирање и на мастер програмима у трајању од 2 године. На тај начин стичу **звање струковног мастер инжењера,** диплому **2. степена високог образовања**, са остварених **120 ЕСПБ** бодова, што је са основним студијама укупно **300 ЕСПБ** бодова.

Висока техничка школа струковних студија из Ниша је на самом почетку, у првом кругу акредитације, успешно акредитовала 2 студијска програма:

- **УПРАВЉАЊЕ ОТПАДОМ**
- **МУЛТИМЕДИЈАЛНЕ КОМУНИУКАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ**

Тиме је потврђено да Школа има капацитете, ресурсе, знање, искуство али првенствено и квалитет да образује нову генерацију инжењера. Програми који су акредитовани настали су у сарадњи са релевантним партнерима из привреде, јавног сектора, али и у сарадњи са међународним универзитетима током сарадње на различитим пројектима.

Важан сегмент мастер струковних студија које се изводе на Високој техничкој школи у Нишу је управо стручна пракса која се изводи у партнерству са приватним и јавним сектором. Стручна пракса представља основу за израду мастер рада и то је важна разлика која разликује струковног мастер инжењера од академског мастер инжењера.

Студијски програм: Управљање отпадом

Ред. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	ЕСПБ
Прва година				
1.	Директиве и стандарди у заштити животне средине	I	обавезни	4
2.	Социјална екологија	I	обавезни	5
3.	Рециклабилни материјали	I	обавезни	8
4.	Логистика отпада	I	обавезни	7
5.	**Предмет изборног блока 1**	I	изборни	6
6.	Испитивање и карактеризација отпада	II	обавезни	6
7.	Управљање пројектима	II	обавезни	6
8.	Технологије прераде отпада	II	обавезни	7
9.	Стручна пракса 1	II	обавезни	4
10.	**Предмет изборног блока 2**	II	изборни	7
Друга година				
11.	Енергетски потенцијал отпада	III	обавезни	6
12.	Сензорски системи	III	обавезни	6
13.	**Предмет изборног блока 3**	III	изборни	7
14.	**Предмет изборног блока 4**	III	изборни	7
15.	Стручна пракса 2	III	обавезни	4
16.	Обрада и анализа података	IV	обавезни	6
17.	Одрживост управљања отпадом	IV	обавезни	6
18.	Примењени истраживачки рад	IV	обавезни	8
19.	Завршни мастер рад	IV		10

Листа изборних предмета

Р.б.	Назив предмета	Сем.	ЕСПБ
Предмет изборног блока **1 (бира се један од два понуђена предмета)**			
1.	Софтверски алати у заштити животне средине	I	6
2.	Пословни енглески	I	6
Предмет изборног блока 2 (бира се један од два понуђена предмета)			
3.	Екодизајн	II	7
4.	Пројектовање депонија	II	7
Предмет изборног блока 3 (бира се један од два понуђена предмета)			
5.	Управљање индустријским отпадом	III	7
6.	Управљање биоразградивим отпадом	III	7
Предмет изборног блока 4 (бира се један од два понуђена предмета)			
7.	Мониторинг постројења за третман отпада	III	7
8.	Технологија прераде отпадних вода	III	7

Студијски програм: Мултимедијалне комуникационе технологије

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
ПРВА ГОДИНА							
1.	Обрада мултимедијалних сигнала	1	Обавезни	3	2	0	**8**
2.	Технике бежичног преноса	1	Обавезни	3	2	0	**8**
3.	Дигитални ТК системи	1	Обавезни	3	2	0	**8**
4.	Енглески језик	1	Обавезни	2	3	0	**4**
5.	Напредне ВЕБ технологије	2	Обавезни	3	2	0	**7**
6.	Мерења у ТК системима	2	Обавезни	3	2	0	**6**
7.	Бежичне сензорске мреже	2	Обавезни	3	2	0	**7**
8.	Стручна пракса 1	2	Обавезни	0	0	0	**5**
9.	*Предмет изборног блока 1*	2	Изборни	2	3	0	**7**
ДРУГА ГОДИНА							
10.	Активни мрежни уређаји	3	Обавезни	3	2	0	**6**
11.	Програмски алати за развој софтвера	3	Обавезни	3	2	0	**6**
12.	Мултимедијалне комуникације	3	Обавезни	3	2	0	**6**
13.	*Предмет изборног блока 2*	3	Изборни	2	3	0	**7**
14.	Стручна пракса 2	3	Обавезни	0	0	0	**5**
15.	*Предмет изборног блока 3*	4	Изборни	3	2	0	**7**
16.	*Предмет изборног блока 3*	4	Изборни	3	2	0	**7**
17.	Примењени истраживачки рад	4	Обавезни	0	0	0	**6**
18.	Завршни мастер рад	4	Обавезни	0	0	6	**10**
Укупно часова и ЕСПБ							**120**

Листа изборних предмета

Р. бр.	Назив предмета	Сем.	Статус предмета	Активна настава			ЕСПБ
				ПРЕ	ВЕЖ	ДОН	
Предмет изборног блока 1 (бира се један од два понуђена предмета)							
1.	Дистрибуирани системи	2	Изборни	2	3	0	**7**
2.	Заштитно кодовање	2	Изборни	2	3	0	**7**
Предмет изборног блока 2 (бира се један од два понуђена предмета)							
3.	ИП комуникације	3	Изборни	2	3	0	**7**
4.	Мобилни оперативни системи	3	Изборни	2	3	0	**7**
Предмет изборног блока 3 (бирају се два од четири понуђена предмета)							
5.	Пројектовање информационих система	4	Изборни	3	2	0	**7**
6.	Развој мултимедијалних апликација	4	Изборни	3	2	0	**7**
7.	Терминални мултимедијални уређаји	4	Изборни	3	2	0	**7**
8.	Архивирање ММ садржаја	4	Изборни	3	2	0	**7**

Примери задатака према програму пријемног испита из математике

Рационални алгебарски изрази

Приликом сређивања алгебарских израза најчешће се користе формуле за растављање полинома на чиниоце:

$\boldsymbol{ax \pm bx = x\,(a \pm b)}$ (издвајање заједничког чиниоца)
$\boldsymbol{ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y)}$ (груписање чланова)
$\boldsymbol{x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2}$ (квадрат збира / разлике)
$\boldsymbol{x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)}$ (разлика квадрата)
$\boldsymbol{x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)}$ (збир / разлика кубова)
$\boldsymbol{x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3}$ (куб збира / разлике)

1. Упростити израз: $\left(\dfrac{1}{a^3} - \dfrac{1}{b^3}\right)\dfrac{ab}{a-b}$.

Решење:

$$\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)\frac{ab}{a-b} = \frac{b^3 - a^3}{a^3b^3}\left(-\frac{ab}{b-a}\right) = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{(ab)^3}\left(-\frac{ab}{b-a}\right) =$$

$$= -\frac{b^2+ab+a^2}{(ab)^2}, \qquad (a, b \neq 0,\ a \neq b).$$

2. Скратити разломак: $\dfrac{x^2+xy+x+y}{x^2+2xy+y^2}$.

Решење:

$$\frac{x^2+xy+x+y}{x^2+2xy+y^2} = \frac{x\,(x+y)+(x+y)}{(x+y)^2} =$$

$$= \frac{(x+y)(x+1)}{(x+y)^2} = \frac{x+1}{x+y}, \qquad (x+y \neq 0).$$

3. Ако је $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$, израчунати $f\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Решење:

Како је $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}=\dfrac{x^2-2x+1-1-1}{x^2+2x+1-1-1}=\dfrac{(x-1)^2-2}{(x+1)^2-2}$, то је

$$f\left(\sqrt{2}+1\right)=\frac{\left(\sqrt{2}+1-1\right)^2-2}{\left(\sqrt{2}+1+1\right)^2-2}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2-2}{\left(\sqrt{2}+2\right)^2-2}=\frac{2-2}{2+4\sqrt{2}+4-2}=0.$$

4. Израчунати $\left(\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{a+1}:\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}\right):\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{a^2+a}$.

Решење:

$$\left(\frac{x^3+2x^2-x-2}{a+1}:\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}\right):\frac{x^3-2x^2-x+2}{a^2+a}=$$

$$=\left(\frac{x^2(x+2)-(x+2)}{a+1}\cdot\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+2)^2}\right)\cdot\frac{a\cdot(a+1)}{x^2\cdot(x-2)-(x-2)}=$$

$$=\left(\frac{(x+2)\cdot\left(x^2-1\right)}{a+1}\cdot\frac{x-2}{x+2}\right)\cdot\frac{a\cdot(a+1)}{(x-2)\cdot\left(x^2-1\right)}=a$$

($x\neq\pm1$, $x\neq\pm2$, $a\neq0$, $a\neq-1$ **).**

5. Израчунати бројну вредност израза:

$$f(a,b,c)=\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right),$$

ако је $a=1\dfrac{33}{40}$, $b=0{,}625$, $c=3{,}2$.

Решење:

Како је

$$f(a,b,c)=\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=$$

$$=\left(\frac{b+c+a}{a\cdot(b+c)}:\frac{b+c-a}{a\cdot(b+c)}\right):\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=$$

$$=\left(\frac{b+c+a}{a\cdot(b+c)}\cdot\frac{a\cdot(b+c)}{b+c-a}\right)\cdot\frac{2bc}{b^2+2bc+c^2-a^2}=$$

$$=\frac{b+c+a}{b+c-a}\cdot\frac{2bc}{(b+c)^2-a^2}=$$

$$=\frac{b+c+a}{b+c-a}\cdot\frac{2bc}{(b+c-a)\cdot(b+c+a)}=$$

$$=\frac{2bc}{(b+c-a)^2},$$

то је

$$f\left(\frac{73}{40},\frac{5}{8},\frac{16}{5}\right)=\frac{2\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{16}{5}}{\left(\frac{5}{8}+\frac{16}{5}-\frac{73}{40}\right)^2}=\frac{4}{\left(\frac{153}{40}-\frac{73}{40}\right)^2}=\frac{4}{\left(\frac{80}{40}\right)^2}=\frac{4}{4}=1.$$

6. Израчунати вредност израза $\left(\left(a+a^{-1}\right)-\left(b+b^{-1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ за $a=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ и $b=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Решење:

Како је

$$a+a^{-1}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{4-4\sqrt{4}+3+4+4\sqrt{3}+3}{4-3}=14$$

и

$$b+b^{-1}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{3-2\sqrt{6}+2+3+2\sqrt{6}+2}{3-2}=10$$

то је $\left(\left(a+a^{-1}\right)-\left(b+b^{-1}\right)\right)^{1/2}=\sqrt{14-10}=\sqrt{4}=2$.

7. Показати да вредност израза A не зависи од a и b:

$$A=\left(\frac{\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{ab}}+\frac{1}{\frac{a+b}{a}}-\frac{1}{\frac{a-b}{a}}\right):\frac{\frac{a+b-(a-3b)}{a+b}}{\frac{3a+b-3(a-b)}{a-b}}.$$

Решење:

$$A=\left(\frac{\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{ab}}+\frac{1}{\frac{a+b}{a}}-\frac{1}{\frac{a-b}{a}}\right):\frac{\frac{a+b-(a-3b)}{a+b}}{\frac{3a+b-3(a-b)}{a-b}}=$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}+\frac{a}{a+b}-\frac{a}{a-b}\right):\frac{\frac{4b}{a+b}}{\frac{4b}{a-b}}=\frac{a^2+b^2+a(a-b)-a(a+b)}{(a-b)(a+b)}:\frac{a-b}{a+b}=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=1;$$

$$(a\neq 0, b\neq 0, a-b\neq 0, a+b\neq 0).$$

8. Показати да је вредност израза

$$B=\left(6t^2+5t-1+\frac{t+4}{t+1}\right):\left(3t-2+\frac{3}{t+1}\right)$$

непаран број за свако $t\in Z\setminus\{-1\}$.

Решење:

$$B=\left(6t^2+5t-1+\frac{t+4}{t+1}\right):\left(3t-2+\frac{3}{t+1}\right)=$$

$$=\frac{6t^2(t+1)+5t(t+1)-(t+1)+t+4}{t+1}:\frac{3t(t+1)-2(t+1)+3}{t+1}=$$

$$=\frac{6t^3+11t^2+5t+3}{t+1}\cdot\frac{t+1}{3t^2+t+1}=\frac{6t^3+11t^2+5t+3}{3t^2+t+1}$$

$$
\begin{array}{l}
\left(6t^3+11t^2+5t+3\right):\left(3t^2+t+1\right)=2t+3 \\
-\ \underline{6t^3-2t^2-2t} \\
\qquad 9t^2+3t+3 \\
\quad -\ \underline{9t^2-3t-3} \\
\qquad\qquad R=0
\end{array}
$$

$B=2t+3$;

$2t$ - паран број,

$2t+3$ - непаран број.

Линеарне једначине и неједначине

Једначина облика $ax+b=0,\quad a,b\in R,$ назива се *линеарна једначина са једном непознатом*. Уколико важи да је:

1. $a\neq 0,$ једначина има јединствено решење $x=-\dfrac{b}{a}$;
2. $a=0,\ b=0,$ једначина је неодређена и има бесконачно много решења;
3. $a=0,\ b\neq 0,$ једначина је немогућа и нема решења.

9. Решити једначину: $\dfrac{2a-x}{1-2a}-\dfrac{2a+x}{2a+1}=\dfrac{2ax}{4a^2-1}$.

Решење:

За $a\neq\pm\dfrac{1}{2}$ дата једначина је еквивалентна једначини:

$(x-2a)(2a+1)-(2a+x)(2a-1)-2ax=0,$

па се после сређивања добија једначина $(1-a)x=4a^2,$ која за $a\neq 1$ има јединствено решење $x=\dfrac{4a^2}{1-a}$. За $a=1$ једначина је немогућа.

10. Решити систем једначина:

$$\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=23$$
$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2.$$

<u>*Решење:*</u>

Нека је $\frac{1}{x}=U$ и $\frac{1}{y}=V$. Добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} 4U+5V &= 23 \\ \underline{5U-4V} &= \underline{-2} \\ 16U+20V &= 92 \\ \underline{25U-20V} &= \underline{-10} \\ 41U &= 82 \\ \underline{5U-4V} &= \underline{-2} \\ U &= 2 \\ V &= 3, \end{aligned}$$

одакле је $x=\frac{1}{U}=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{V}=\frac{1}{3}$. Дакле, решење полазног система је уређен пар $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.

Квадратне једначине и неједначине. Квадратна функција

Једначина облика $ax^2+bx+c=0,\quad a,b,c\in R,\quad a\neq 0,$ назива се *квадратна једначина.* Решења квадратне једначине дата су формулом:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.}$$

Израз под кореном $D=b^2-4ac$, назива се *дискриминанта квадратне једначине* и од ње зависи природа решења квадратне једначине:

1.	$D>0$,	решења су реална и различита;
2.	$D=0$,	решења су реална и једнака;
3.	$D<0$,	решења су коњуговано комплексни бројеви.

Ако су x_1, x_2 решења квадратне једначине, важи следеће:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1 x_2=\frac{c}{a},\quad \text{(Виетове формуле)};$$
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

11. Одредити m тако да решења једначине $3x^2-2mx+m-2=0$ задовољавају услов $x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3=64$.

Решење:

Према Виетовој формули је $x_1+x_2=\dfrac{2m}{3}$ и како је $x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3$ и $64=4^3$, то

је $x_1+x_2=4$ тј. $\dfrac{2m}{3}=4$, одакле је $m=6$.

12. Одредити параметар a тако да један од корена једначине $x^2-\dfrac{15}{4}x+a=0$ буде квадрат другог корена.

Решење:

Према Виетовим формулама је $x_1+x_2=\dfrac{15}{4}$ и $x_1\cdot x_2=a$ и како је један корен квадрат другог тј. $x_1=x_2^2$ то је $x_2^2+x_2=\dfrac{15}{4}\Leftrightarrow 4x_2^2+4x_2-15=0$. Одавде је $x_2'=\dfrac{3}{2}$ и $x_2''=-\dfrac{5}{2}$ и како је $a=x_2^3$ то постоје две вредности параметра a које задовољавају постављени услов: $a_1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=\dfrac{27}{8}$ и $a_2=\left(-\dfrac{5}{2}\right)^3=-\dfrac{125}{8}$.

13. Не решавајући квадратну једначину $x^2 - x + m = 0$, одредити параметар $m \in R$, тако да њена решења задовољавају услов $x_1^3 + x_2^3 = 7$.

Решење:

Користећи Виетове формуле добијамо да је $x_1 + x_2 = 1$ а $x_1 \cdot x_2 = m$. Како је

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)\cdot\left(x_1^2 - x_1\cdot x_2 + x_2^2\right) = \\ &= (x_1 + x_2)\cdot\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2\right) = \\ &= (x_1 + x_2)\cdot\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1\cdot x_2\right) = \\ &= 1\cdot\left(1^2 - 3m\right) = \\ &= 1 - 3m \end{aligned}$$

и $x_1^3 + x_2^3 = 7$, па је $1 - 3m = 7$, а $m = -2$.

14. Решити неједначину $\dfrac{4x-2}{-x^2+3x+4} > 1$.

Решење:

Дата неједначина може се представити у облику $\dfrac{4x-2}{-x^2+3x+4} - 1 > 0$ тј. $\dfrac{x^2+x-6}{-x^2+3x+4} > 0$ односно $\dfrac{(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x-4)} < 0$. Решења последње неједначине су $x \in (-3,-1)\cup(2,4)$. Шематски приказ решења дат је у табели.

x	-3	-1	2	4	
$(x-2)\cdot(x+3)$	+	-	-	+	+
$(x+1)\cdot(x-4)$	+	+	-	-	+
$\dfrac{(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x-4)}$	+	-	+	-	+

15. Одредити реалан параметар p тако да за свако реално x буде $(p-2)x^2 - 2px + 2p - 3 < 0$.

Решење:

Најпре мора бити $p - 2 < 0$ и $D = 4p^2 - 4(p-2)(2p-3) < 0$, тј. $p < 2$ и $-p^2 + 7p - 6 < 0$.

Последња неједнакост је испуњена за $p<1$ или $p>6$, па је пресек решења $p<2$ и $(p<1 \vee p>6)$, $p<1$.

16. Одредити реалан параметар k тако да је за свако x испуњена нејаднакост:

$$\left|\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}\right|<3.$$

Решење:

Дата нејаднакост еквивалентна је систему неједнакости:

$$-3<\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}<3\text{, то јест }\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}>-3\wedge\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}<3.$$

Како је $x^2+x+1>0$ за свако x, добијамо:

$$x^2-kx+1>-3(x^2+x+1)\wedge x^2-kx+1<3(x^2+x+1);$$

$$4x^2-(k-3)x+4>0\wedge -2x^2-(k+3)x-2<0;$$

што ће важити ако је:

$$D=(k-3)^2-64<0\wedge D=(k+3)^2-16<0$$

$$k\in(-5,11)\wedge k\in(-7,1),$$

па је пресек решења $k\in(-5,1)$.

17. Решити једначину

$$\sqrt{x+10}-\frac{6}{\sqrt{x+10}}=5.$$

Решење:

Сменом $\sqrt{x+10}=t$ једначина постаје $t-\frac{6}{t}=5$, односно, $t^2-5t-6=0$.

Корени ове једначине су $t_1=6$ и $t_2=-1$. Међутим, $t_2=-1$ није решење, јер t не може бити негативно. За $t=6$ добијамо $x+10=36$ тј. $x=26$.

18. Решити једначину: $2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-9\left(\frac{x^2+1}{x}\right)+10=0$.

Решење: Увођењем смене $t=\frac{x^2+1}{x}$, једначина има облик: $2t^2-9t+10=0$, а њена решења су $t_1=\frac{5}{2}$ и $t_2=2$. Тада је:

$$\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2} \ \vee \ \frac{x^2+1}{x}=2,$$

$$\Leftrightarrow \ 2x^2-5x+2=0 \ \vee \ x^2-2x+1=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x_1=2, \ x_2=\frac{1}{2}, \ x_3=x_4=1.$$

Степеновање. Кореновање. Логаритмовање

Основна својства *степена* реалних бројева дата су следећим формулама:

$$a^1=a, \quad a^{n+1}=a^n a, \quad (a\in R, \ n\in N);$$
$$a^0=1, \quad (a\neq 0);$$
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, \quad (a\neq 0, \quad n\in N);$$
$$a^m a^n=a^{m+n},$$
$$a^m : a^n=a^{m-n},$$
$$(a^m)^n=a^{mn},$$
$$(ab)^n=a^n b^n,$$
$$(a:b)^n=a^n:b^n, \quad (a,b\in R\setminus\{0\}, \quad m,n\in Z).$$

Основна својства *корена* реалних бројева са природним изложиоцима су:

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a, & n-neparan \\ |a|, & n-paran \end{cases}, \quad (a\in R,\ n\in N),$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=a^{\frac{m}{n}},$$

$$\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b},\ (b\neq 0),$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a},$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}},\ (a\geq 0,\ b\geq 0,\ m,n,p\in N).$$

Логаритам броја $b,\ (b>0),$ за основу $a,\ (a>0\ \wedge\ a\neq 1),$ дефинише се на следећи начин:

$$\log_a b=x \quad \Leftrightarrow \quad a^x=b.$$

Ако је $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0,\ s\in R,\ r\in R\setminus\{0\},$ тада важи:

$$a^{\log_a b}=b,$$

$$\log_a a=1,$$

$$\log_a 1=0,$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a},$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},$$

$$\log_a b^s=s\log_a b,$$

$$\log_{a^r} b=\frac{1}{r}\log_a b,$$

$$\log_a bc=\log_a b+\log_a c,$$

$$\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c.$$

19. Решити једначину: $9^x + 3^{x+1} + 2 = 0$.

Решење:

Дату једначину можемо записати као $\left(3^x\right)^2 + 3 \cdot 3^x + 2 = 0$. После увођења смене $3^x = t$ добијамо $t^2 + 3t + 2 = 0$, одакле је $t_1 = -1$ и $t_2 = -2$. Како је $3^x > 0$ то једначина нема решења.

20. Решити неједначину: $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 3^3 \leq 0$.

Решење:

Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\left(3^x\right)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 \leq 0$. Сменом $3^x = t$, добијамо $t^2 - 6t - 27 \leq 0$ тј. $(t+3) \cdot (t-9) \leq 0$ одакле је $-3 \leq t \leq 9$. Како је $3^x > 0$ добијамо $0 < 3^x \leq 9$ тј. $0 < 3^x \leq 3^2$, одакле је $x \leq 2$.

21. Решити једначину: $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x = 4, \text{ тј. } \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x} = 4.$$

Увођењем смене $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = t$ добијамо $t + \dfrac{1}{t} = 4$ тј. $t^2 - 4t + 1 = 0$. Одавде добијамо $t_1 = 2 - \sqrt{3}$ и $t_2 = 2 + \sqrt{3}$ тј.

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2-\sqrt{3}\right) \text{ и } \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1},$$

$$\frac{x}{2} = 1 \quad \vee \quad \frac{x}{2} = -1,$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -2.$$

22. Израчунати вредност израза: $2\log_5 125 \cdot 2^{1+\log_2 4} - 3^{2\log_3 9-1}$.

Решење:

$$2\log_5 125 \cdot 2^{1+\log_2 4} - 3^{2\log_3 9-1} = 2\log_5 5^3 \cdot 2^{1+\log_2 2^2} - 3^{2\log_3 3^2-1} = 2\cdot 3\cdot 8 - 27 = 21.$$

23. Израчунати вредност израза: $0{,}6\cdot(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$.

Решење:

$$0{,}6\cdot(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5} = 0{,}6\cdot(1+(3^2)^{\log_3 8})^{\log_{65} 5} = 0{,}6\cdot(1+3^{\log_3 8^2})^{\log_{65} 5} =$$
$$= 0{,}6\cdot(1+64)^{\log_{65} 5} = 0{,}6\cdot 5 = 3.$$

24. Решити једначину: $\log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$.

Решење:

Нека је $x-5>0$ и $2x-3>0$, тј. $x>5$. Дата једначина еквивалентна је једначини $\log\sqrt{(x-5)\cdot(2x-3)} = \log 3$, тј.

$(x-5)\cdot(2x-3)=9$, односно, једначини $2x^2-13x+6=0$ чија су решења $x_1=6$ и $x_2=\dfrac{1}{2}$, од којих је само прво решење полазне једначине.

25. Решити једначину: $\log_x 2 - \log_4 x + \dfrac{7}{6} = 0$.

Решење:

Нека је $x>0$ и $x\neq 1$. Дата једначина еквивалентна је једначини $\log_x 2 - \dfrac{1}{2\log_x 2} + \dfrac{7}{6} = 0$.

Уведимо смену $\log_x 2 = t$. Тада је $t - \dfrac{1}{2t} + \dfrac{7}{6} = 0$, тј. $6t^2+7t-3=0$, одакле је $t_1=\dfrac{1}{3}$, $t_2=-\dfrac{3}{2}$, $x_1=2^3=8$, $x_2=2^{-\frac{2}{3}}$.

26. Наћи област дефинисаности функције

$$f(x)=\sqrt{\log\frac{x^2-2x+3}{x+1}}\,.$$

Решење:

Функција је дефинисана за $\log\frac{x^2-2x+3}{x+1}\geq 0$, тј. $\frac{x^2-2x+3}{x+1}\geq 1$,
$\frac{x^2-2x+3}{x+1}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x+1}\geq 0$.
Решење следи из табеле :

x	-1	1	2	
$x-1$	-	-	+	+
$x-2$	-	-	-	+
$x+1$	-	+	+	+
$\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x+1}$	-	+	-	+

па је коначно решење $x\in(-1,1]\cup[2,+\infty)$.

27. Решити систем једначина:

$$\log x-\log y=2$$
$$\log x\cdot\log y=3.$$

Решење:

Из прве једначине добијамо $\log y=\log x-2$, одакле је $\log x\cdot(\log x-2)=3$. После увођења смене $\log x=t$ добијамо $t^2-2t-3=0$ одакле је $t=3$ или $t=-1$, односно,

$$\log x=3 \quad \text{или} \quad \log x=-1$$
$$x=10^3 \quad \text{или} \quad x=10^{-1}$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$\log y=1 \qquad \log y=-3$$
$$y=10 \quad \text{или} \quad y=10^{-3}.$$

28. Решити неједначину: $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x < 6$.

Решење:

Област дефинисаности је $x > 0$. Неједначина је еквивалентна са:

$$\log_3 x + \log_{3^{1/2}} x + \log_{3^{-1}} x < 6 \Leftrightarrow \log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x < 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\log_3 x < 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3 x < 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3 x < \log_3 3^3 \ ,$$

одакле је $x < 27$ и како је $x > 0$ то је $0 < x < 27$.

Аритметички и геометријски низови

Низ бројева у коме је разлика свака два суседна члана низа једнака, назива се *аритметички низ* (аритметичка прогресија).

a_1 – први члан низа;
a_n – n-ти (општи) члан низа, $n \in N$;
d – разлика аритметичког низа;
S_n – збир првих n чланова.

За аритметички низ важе следеће формуле:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \ ;$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Низ бројева у коме је количник свака два суседна члана низа једнак, назива се *геометријски низ* (геометријска прогресија).

$a_1 -$ први члан низа;

$a_n -$ n-ти (општи) члан низа, $n \in N$;

$q -$ количник аритметичког низа;

$S_n -$ збир првих n чланова.

За геометријски низ важе следеће формуле:

$$a_n = a_1 q^{n-1};$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}, \quad |q| > 1; \qquad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

29. Један угао троугла је 120^o, а странице тог троугла образују аритметичку прогресију чија је разлика $d = 4$. Колике су странице тог троугла?

Решење:

Нека је $c = b + 4$, $b = b$, $a = b - 4$, $\gamma = 120^o$. Према косинусној теореми је $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, одакле је $(b+4)^2 = (b-4)^2 + b^2 - 2(b-4)\cdot b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, па је $2b^2 - 20b = 0$, тј. $2b \cdot (b-10) = 10$.

Дакле $b = 10$, $a = 6$ и $c = 14$.

30. Три броја чине аритметички низ. Њихов збир је 6, а збир њихових квадрата 62. Који су то бројеви?

Решење:

Нека је $a_1 = a_2 - d$, $a_2 = a_2$, $a_3 = a_2 + d$. Како је $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ тј. $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 6 \Rightarrow 3a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = 2$. Како је $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 62$ то је $(a_2 - d)^2 + a_2^2 + (a_2 + d)^2 = 62$, $3a_2^2 + 2d^2 = 62$, $3 \cdot 4 + 2d^2 = 62$, $d^2 = 25$, $d = \pm 5$, па су тражене вредности бројева $-3,\ 2,\ 7$.

31. Бројеви: $2x-3$, $3x+4$, $5x+1$ су прва три узастопна члана аритметичког низа. Одредити x и наћи суму првих x чланова.

Решење:

$$a_1 = 2x-3,\ a_2 = 3x+4,\ a_3 = 5x+1.$$

Како је:

$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, то је $(3x+4)-(2x-3)=(5x+1)-(3x+4)$, $x+7=2x-3$, $x=10$, па је $a_1 = 17,\ a_2 = 34,\ a_3 = 51,\ d = 17$. Отуда је

$$S_x = S_{10} = \frac{10}{2}\cdot\left[2a_1 + (10-1)d\right] = 5\cdot\left[2\cdot 17 + 9\cdot 17\right] = 935.$$

32. Четврти члан аритметичког низа је 9, а девети члан је -6. Колико чланова овог низа треба сабрати да се добије 54?

Решење:

Како је:

$$a_4 = a_1 + 3d = 9$$
$$a_9 = a_1 + 8d = -6,$$

решавањем система добије се да је $d = -3,\quad a_1 = 18.$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1)) \text{ па је } \frac{n}{2}(36-3(n-1)) = 54, \ \Leftrightarrow -n^2 + 13n - 36 = 0.$$

Решења ове квадратне једначине су $n_1 = 4$ и $n_2 = 9$. Дакле, треба сабрати 4 или 9 чланова низа.

33. Збир три броја која образују растућу геометријску прогресију је 126. Ако је средњи члан 24, одредити најмањи члан.

Решење:

Како је $a_2 = 24$ и $a_1 + a_2 + a_3 = 126$, то је $\frac{24}{q} + 24 + 24q = 126$, $4q^2 - 17q + 4 = 0$, одакле је $q = 4$ или $q = \frac{1}{4}$. Међутим, прогресија је растућа па решење $q = \frac{1}{4}$ не долази у обзир. Дакле, $a_1 = \frac{24}{4} = 6$.

34. У геометријском низу је $a_6 - a_4 = 216$, $a_3 - a_1 = 8$ и $S_n = 40$. Одредити a_1, q и n.

Решење: Из прве две једначине добија се:

$$a_3 - a_1 = a_1 \cdot q^2 - a_1 = a_1(q^2 - 1) = 8$$

$$a_6 - a_4 = a_1 \cdot q^5 - a_1 \cdot q^3 = a_1 \cdot q^3(q^2 - 1) = 216.$$

Одатле је $q = 3$ а $a_1 = 1$. Заменом у трећу једначину добиће се:

$$40 = \frac{3^n - 1}{2} \Rightarrow 3^n = 81 \text{ па је } n = 4.$$

35. Наћи аритметичку прогресију код које збир првих n чланова износи $3n^2 + 4n$, за свако $n \in N$.

Решење:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + d(n-1)\right)$$

па је: $3n^2 + 4n = a_1 \cdot n + \frac{dn^2}{2} - \frac{dn}{2} = \frac{dn^2}{2} + n\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)$, одакле следи да је $\frac{d}{2} = 3 \Rightarrow d = 6$ и $a_1 = 7$.

36. Три броја чине аритметички низ, а њихов збир је 12. Ако се последњи број повећа за вредност првог, добија се геометријски низ. Који су то низови?

Решење:

Означимо чланове аритметичког низа са a_1, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Тада је

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12 \Rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 12 \Leftrightarrow 3a_1 + 3d = 12 \Leftrightarrow a_1 + d = 4. \quad (1)$$

Геометријски низ би био према условима задатка $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + d$, $b_3 = a_3 + a_1 = a_1 + 2d + a_1 = 2a_1 + 2d$. Како је $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, то је

$$(a_1 + d)^2 = a_1 \cdot (2a_1 + 2d)$$

$$(a_1 + d)^2 = 2a_1 \cdot (a_1 + d)$$

$$a_1 = d. \quad (2)$$

Једначине (1) и (2) дају решење $d = 2$, $a_1 = 2$ па је аритметички низ 2, 4, 6, а геометријски 2, 4, 8.

Тригонометрија

Ако је α оштар угао, a и b катете, (наспрам угла α је катета a), а c хипотенуза правоуглог троугла, тада се тригонометријске функције дефинишу на следећи начин:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad tg\alpha = \frac{a}{b}, \quad ctg\alpha = \frac{b}{a}.$$

За тригонометријске функције важе основни тригонометријски идентитети:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$
$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$
$$tg\alpha\ ctg\alpha = 1,$$
$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}},$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Тригонометријске функције збира и разлике два угла једнаке су:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$tg(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\ tg\beta},$$
$$ctg(\alpha\pm\beta) = \frac{ctg\alpha\, ctg\beta \mp 1}{ctg\alpha \pm ctg\beta}.$$

Тригонометријске функције двоструког угла једнаке су:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha},$$
$$ctg\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}.$$

Тригонометријске функције полууглова једнаке су:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$
$$ctg\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Трансформација збира и разлике у производ:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Трансформација производа у збир или разлику:

$$\sin\alpha\ \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$
$$\cos\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right),$$
$$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right).$$

37. Ако је $tg^2\alpha + ctg^2\alpha = 2$, израчунати $tg\alpha + ctg\alpha$.

Решење:

Како је $(tg\alpha + ctg\alpha)^2 = tg^2\alpha + 2tg\alpha ctg\alpha + ctg^2\alpha$ и $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, то је $(tg\alpha + ctg\alpha)^2 = 4$, одакле је $tg\alpha + ctg\alpha = \pm 2$.

38. Упростити израз: $\dfrac{1+\sin 2a - \cos 2a}{1+\sin 2a + \cos 2a}$.

Решење:

Коришћењем формула добија се:

$$\frac{1+\sin 2a-\cos 2a}{1+\sin 2a+\cos 2a} = \frac{\cos^2 a+\sin^2 a+\sin 2a-\left(\cos^2 a-\sin^2 a\right)}{\cos^2 a+\sin^2 a+\sin 2a+\cos^2 a-\sin^2 a} =$$
$$= \frac{2\sin^2 a+2\sin a\cos a}{2\cos^2 a+2\sin a\cos a} = \frac{2\sin a(\sin a+\cos a)}{2\cos a(\sin a+\cos a)} = \operatorname{tg} a$$

39. Ако је $\operatorname{tg}\alpha = 3$, израчунати $\dfrac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$.

Решење:

Дати израз $\dfrac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$ се дељењем сваког члана са $\cos 2\alpha$ трансформише у израз $\dfrac{2tg2\alpha - 3}{4tg2\alpha + 5}$. Како је $tg\alpha = 3$ то је $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = -\dfrac{3}{4}$, па је тражена вредност израза једнака $-\dfrac{9}{4}$.

40. Израчунати вредност израза $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{ctg\dfrac{\alpha}{2}-tg\dfrac{\alpha}{2}}$, ако је: $\sin\alpha+\cos\alpha=m$, и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Решење:

Квадрирањем претпоставке да је $\sin\alpha+\cos\alpha=m$, добијамо релацију $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{m^2-1}{2}$, па је вредност израза:

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{ctg\dfrac{\alpha}{2}-tg\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}}=$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha}{\dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}.$$

41. Решити једначину: $\cos^4 x-\sin^4 x=0$.

Решење:

Дата једначина је еквивалентна једначини:

$$\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cdot\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=0,$$

па је $\cos^2 x-\sin^2 x=0 \Leftrightarrow tg^2x=1$, одакле је $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

42. Решити неједначину: $\sin x+\cos x<\sqrt{2}$.

Решење:

Дату неједначину напишимо у облику:

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)<\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) < 1.$$

Како је $-1 \le \sin\alpha \le 1$ за ма који угао α, то се решење ове неједначине своди на решење да је:

$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \ne 1$, одн. $x + \frac{\pi}{4} \ne \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, а $x \ne \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Геометрија у равни

Троугао

За произвољан троугао чије странице имају дужине a, b, c, одговарајуће висине h_a, h_b, h_c, унутрашњи углови су α, β, χ а спољашњи углови $\alpha_1, \beta_1, \chi_1$, важе следеће формуле:

$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ - (површина троугла)

$O = 2s = a + b + c$ - (обим троугла)

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ - (Херонов образац)

$r = \frac{P}{s}$ - (полупречник уписаног круга у троугао)

$R = \frac{abc}{4P}$ - (полупречник описаног круга око троугла)

$a : b = h_b : h_a$ - (однос страница и висина у троуглу)

$\alpha + \beta + \chi = 180^\circ$ - (збир унутрашњих углова троугла)

$\alpha_1 + \beta_1 + \chi_1 = 360^\circ$ - (збир спољашњих углова троугла)

$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta + \chi$ - (однос унутр. и спољ. углова)

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\chi} = 2R$ - (Синусна теорема)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$ - (Косинусна теорема)

За *правоугли троугао* са хипотенузом ***c*** важе формуле:

$P=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch_c$ - (површина правоуглог троугла)

$c^2=a^2+b^2$ - (Питагорина теорема)

$r=s-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}$ - (полупречник уписаног круга)

$R=\frac{c}{2}=t_c$ - (полупречник описаног круга)

Ако је троугао *једнакостраничан*:

$\alpha=\beta=\chi=60^\circ \Leftrightarrow a=b=c$

$O=3a$ (обим једнакостраничног троугла)

$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (површина једнакостраничног троугла)

$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (висина једнакостраничног троугла)

$r=\frac{1}{3}h=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ (полупречник уписаног круга)

$R=\frac{2}{3}h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (полупречник описаног круга)

Четвороугао

За *четвороуглове* важе следеће формуле:

$P=ab$, $O=2(a+b)$ - (површина и обим правоугаоника)

$P=a^2=\frac{d^2}{2}$, $O=4a$ - (површина и обим квадрата)

$d=a\sqrt{2}$ - (дијагонала квадрата)

$R=\frac{d}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r=\frac{a}{2}$ - (полупреч. опис. и упис. круга у квадрат)

$P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ - (површина ромба)

$r = \frac{h}{2}$ - (полупречник уписаног круга ромба)

$P = \frac{a+b}{2} h = m h$ - (површина трапеза)

$m = \frac{a+b}{2}$ - (средња линија трапеза)

$P = a h_a = b h_b$ - (површина паралелограма)

Правилан шестоугао

Правилан шестоугао могуће је поделити на шест једнакостраничних троуглова. За њега важе следеће формуле:

$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $O = 6a$ - (површина и обим правилног шестоугла)

$R = a$ - (полупречник описаног круга)

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ - (полупречник уписаног круга)

$d_1 = 2a$ - (дужа дијагонала правилног шестоугла)

$d_2 = 2h = a\sqrt{3}$ - (краћа дијагонала правилног шестоугла)

Правилан многоугао

Ако је n број страница правилног многоугла $(n \geq 3)$, правилан многоугао је могуће поделити на n подударних троуглова и важе следеће формуле:

$P = n P_{\Delta}$, $O = na$ - (површина и обим правилног многоугла)

$S_n = (n-2)180^{\circ}$ - (збир унутрашњих углова)

$\alpha = \frac{S_n}{n}$ - (унутрашњи угао)

$d_n = n-3$ - (број дијагонала из једног темена)

$D_n = \dfrac{n\ (n-3)}{2}$ - (укупан број дијагонала)

Круг

За круг полупречника r, са централним углом α, периферијским углом β, важи следеће:

$P = r^2\pi,\quad O = 2r\pi$ - (површина и обим круга)

$l = \dfrac{r\pi\alpha}{180}$ - (дужина лука)

$P_i = \dfrac{r^2\pi\alpha}{360} = \dfrac{r\ l}{2}$ - (површина исечка)

$\alpha = 2\beta$ - (однос централног и периферијског угла)

$P_{kp} = \pi(r_1^{\ 2} - r_2^{\ 2})$ - (површина кружног прстена)

43. Ако се број страница правилног многоугла повећа за 3, његов унутрашњи угао ће се повећати 27°. Одредити број страница многоугла.

Решење:

Означимо са n број страница правилног многоугла, а са Sn збир његових унутрашњих углова. Тада је $n \cdot \alpha = Sn$ и како је:

$$Sn = (n-2)\cdot 180^o ,$$

то је:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180}{n} .$$

Према условима задатка $\dfrac{S_{n+3}}{n+3} = \alpha + 27$, одакле је:

$$\frac{(n+1)\cdot 180}{n+3} = \frac{(n-2)\cdot 180}{n} + 27, \quad \text{тј.}$$

$$27n^2 + 81n - 1080 = 0 ,$$

одакле је $n^2 + 3n - 40 = 0$.

Како је је $n > 0$, то је једино решење $n = 5$.

44. Збир катета правоуглог троугла је 32. Ако се већа катета умањи за 5 cm, а мања повећа за 4 cm, површина се не мења. Одредити странице троугла.

Решење:

Нека су a и b катете правоуглог троугла. Из услова задатка добијамо систем једначина:

$$a+b=32$$
$$\frac{1}{2}(a+4)\cdot(b-5)=\frac{1}{2}ab\ ,$$

који је еквивалентан са системом:

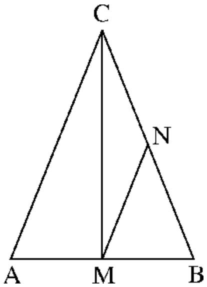
$$\begin{aligned} a+b&=32 \\ 4b-5a&=20 \end{aligned} \quad (b>a),$$

одакле добијамо:

$a=12$ cm, $b=20$ cm и $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+20^2}=\sqrt{544}=4\sqrt{34}$ cm.

45. Израчунати површину једнакокраког троугла основице 12 cm ако је висина која одговара основици једнака одсечку који спаја средине основице и крака.

Решење:

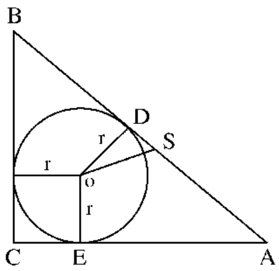


Како је код једнакокраког троугла подножје висине основице на средини основице, то је $AM=\frac{1}{2}AB$. Како је и $BN=\frac{1}{2}BC$, то је дуж MN средња линија ΔABC. По услову задатка је $h_c=CM=MN$ и $MN=NC$, то је ΔMNC једнакостраничан а угао $MCN=60^\circ$. Из ΔMBC важи да је:

$CM=\frac{MB}{tg60^\circ}=\frac{\frac{1}{2}AB}{tg60^\circ}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$. Како је $P=\frac{c\cdot h_c}{2}$, то је $P=\frac{12\cdot 2\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$ cm².

46. Катете правоуглог троугла су 3 cm и 4 cm. Наћи растојање између центра уписаног и центра описаног круга.

Решење:



Како је $a = 3$ cm и $b = 4$ cm, то је $c = 5$ cm. $R = \frac{1}{2}c = 2{,}5$ cm и $r = s - c$, где је $S = \frac{a+b+c}{2} = 6$, па је $r = 1$ cm. У правоуглом троуглу DOS је $x = DS = AD - AS = AD - \frac{c}{2} = AE - \frac{c}{2} = b - r - \frac{c}{2} = \frac{1}{2}$, па је $OS^2 = OD^2 + DS^2 = r^2 + x^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ а $OS = \frac{\sqrt{5}}{2}$ cm.

47. Страница ромба је $a = 9$ cm, а збир дијагонала $d_1 + d_2 = 24$ cm. Одредити површину ромба.

Решење:

Како је:

$$a^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{4} \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 4 \cdot 81 = 324 .$$

Из једнакости:

$$(d_1 + d_2)^2 = 24^2 \quad \Rightarrow \quad d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 \cdot d_2 = 576 ,$$

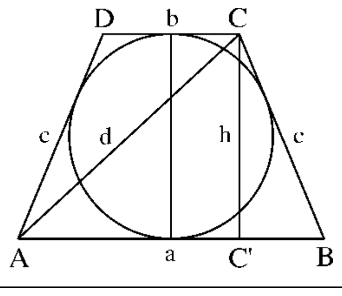
добија се:

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{576 - 324}{2} = 126 .$$

Како је површина ромба $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, то је $P = \frac{126}{2} = 63$ cm².

48. Око круга полупречника $r = 1{,}5$ cm описан је једнакокраки трапез површине $P = 15$ cm². Израчунати дужину дијагонале овог трапеза.

Решење:



Нека су a и b основице трапеза и h висина трапеза. Приметимо да је $2r = h$, $h = 3$. Како је $P = \frac{a+b}{2}h \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{P}{h} = \frac{15}{3} = 5$. Из правоуглог троугла $AC'C$ добијамо: $d^2 = x^2 + h^2$, $x = |AC'| = a - \left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$, па је $d^2 = 5^2 + 3^2$, $d^2 = 34 \quad \Rightarrow d = \sqrt{34}$ cm.

Геометрија у простору

За израчунавање површина и запремина рогљастих и обртних тела са базом (површином основе) B, висином H, омотачем M, полупречником основе обртних тела r и изводницом обртних тела s, неопходне су следеће формуле:

$P = 2B + M$, $V = BH$ - (површина и запремина призме)

$P = B + M$, $V = \frac{1}{3}BH$ - (површина и запремина пирамиде)

$P = B_1 + B_2 + M$ - (површина зарубљене пирамиде)

$V = \frac{1}{3}H\ (B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2)$ - (запремина зарубљене пирамиде)

$P = 2B + M = 2r^2\pi + 2r\pi H$ - (површина ваљка)

$V = BH = r^2\pi\ H$ - (запремина ваљка)

$P = B + M = r^2\pi + r\pi s$ - (површина купе)

$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi\ H$ - (запремина купе)

$P = B_1 + B_2 + M = r_1^2\pi + r_2^2\pi + (r_1 + r_2)\pi\ s$ - (повр. зарубљене купе)

$V = \frac{1}{3}H\ (B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2) = \frac{H\pi}{3}\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)$ - (запр. заруб. купе)

$P = 4r^2\pi$, $V = \frac{4}{3}r^3\pi$ - (површина и запремина лопте)

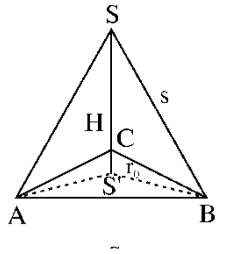
49. Димензије правоуглог паралелопипеда односе се као 2:3:6, а његова дијагонала је $35\ \mathrm{cm}$. Израчунати запремину паралелопипеда.

Решење:

Из $a : b : c = 2 : 3 : 6 \Rightarrow a = 2k$, $b = 3k$ и $c = 6k$. Како је $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $D^2 = (2k)^2 + (3k)^2 + (6k)^2$, $D^2 = 49k^2$, $D = 7k$, $35 = 7k \Rightarrow k = 5$. Одатле је $a = 10\ \mathrm{cm}$, $b = 15\ \mathrm{cm}$, $c = 30\ \mathrm{cm}$, па је $V = a \cdot b \cdot c$, $V = 10 \cdot 15 \cdot 30$, $V = 4500\ \mathrm{cm}^3$.

50. Одредити запремину правилне тростране пирамиде чија је основна ивица $a = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$, а бочна ивица $s = 5\,\text{cm}$.

Решење:



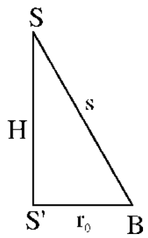
Како је $r_o = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 3\,\text{cm}$ и

$$H^2 = s^2 - r_o^2\ ,$$

$$H^2 = 5^2 - 3^2\ ,$$

$$H^2 = 16\ ,$$

$$H = 4\,\text{cm}\ ,$$



па је:

$$V = \frac{1}{3}B\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H\ ,$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 4\ ,$$

$$V = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

51. У тространу призму чије су основне ивице $a = 13\,\text{cm}$, $b = 14\,\text{cm}$ и $c = 15\,\text{cm}$ уписан је и око ње описан ваљак. Наћи однос запремина та два ваљка.

Решење:

Означимо са r_u полупречник основе уписаног ваљка, са r_o полу-пречник основе описаног ваљка и површину основе призме са P. Према Хероновом обрасцу:

$$P = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}\,,$$

где је $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21\,\text{cm}$, добија се $P = 84\,\text{cm}^2$.

Како је:

$$P = r_u\cdot s \quad\Rightarrow\quad r_u = \frac{84}{21} = 4\,\text{cm}$$

и

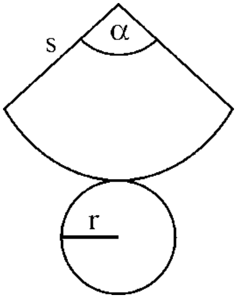
$$P = \frac{abc}{4r_o} \quad\Rightarrow\quad r_o = \frac{abc}{4P} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84} = \frac{65}{8}\quad ,$$

Добија се:

$$\frac{V_u}{V_o} = \frac{r_u^2\pi \cdot H}{r_o^2\pi \cdot H} = \frac{r_u^2}{r_o^2} = \frac{4^2}{\left(\frac{65}{8}\right)^2} = \frac{32^2}{65^2}.$$

52. Када се омотач купе развије у равни добија се четвртина круга полупречника $4\sqrt{5}$. Израчунати запремину купе.

Решење:



Нека је s ивица купе, r полупречник основе и H висина купе. Тада из формуле $l = \frac{s\pi\alpha}{180}$ за дужину лука полупречника s и централног угла α и формуле $l = 2r\pi$ за обим основе кружне купе добија се $\frac{4\sqrt{5}\cdot\pi\cdot 90}{180} = 2r\pi$, одакле је $r = \sqrt{5}$.

Како је $H^2 = s^2 - r^2$, то је $H = 5\sqrt{3}$.

Отуда је:

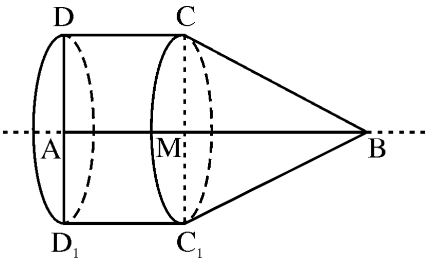
$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot H\ ,$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \pi \cdot 5\sqrt{3}\ ,$$

$$V = \frac{25\pi}{\sqrt{3}}.$$

53. Правоугли трапез основица $a = 10\,\text{cm}$ и $b = 2\,\text{cm}$ и $P = 90\,\text{cm}^2$ ротира око веће основе. Израчунати површину и запремину насталог тела.

Решење:



Како је површина трапеза $P=\frac{a+b}{2}\cdot h$, то је $\frac{10+2}{2}\cdot h=90$, и $h=15\,\text{cm}$, односно $|AD|=15\,\text{cm}$. Површина насталог тела је збир површине основе ваљка и омотача ваљка и купе, па је:

$$P=r^2\pi+2r\pi\cdot H_1+r\pi s=|AD|^2\pi+2|AD|\cdot|AM|\cdot\pi+|AD|\cdot|BC|\cdot\pi\,.$$

Како је $|AM|=|DC|$, то је $|AM|=b=2$ cm.

Такође је $s=|BC|$ и

$$s^2=|CM|^2+|MB|^2=|AD|^2+(|AB|-|AM|)^2=$$
$$=15^2+(10-2)^2=225+64=289.$$

Дакле, $s=17$, па је $P=225\pi+60\pi+255\pi=540\pi$ cm^2.

Запремина насталог тела једнака је збиру запремина ваљка и купе, односно:

$$V=r^2\pi\cdot H_1+\frac{1}{3}r^2\pi\cdot H_2=r^2\pi\cdot b+\frac{1}{3}r^2\pi\cdot(a-b)=450\pi+\frac{1}{3}1800\pi=1050\pi\text{ cm}^3.$$

54. Осни пресек праве купе, полупречника основе r, је једнакостраничан троугао. На ком растојању од врха купе треба поставити раван паралелну основи, тако да она полови запремину купе?

Решење:

Означимо са V и V_1 запремине дате и одсечене купе. Тада је $V:V_1=2:1$, па је $r:r_1=\sqrt[3]{2}:1$ и $r_1=\frac{r}{\sqrt[3]{2}}$. Тражено растојање је $H_1=\frac{2r_1\sqrt{3}}{2}=\frac{r\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

55. У коцку ивице $a=4\,\text{cm}$ уписана је лопта. Колико је пута запремина коцке већа од запремине лопте?

Решење:

Ивица коцке је $a = 4\,\text{cm}$ а полупречник лопте је $r = 2\,\text{cm}$. Како је запремина коцке $V_k = a^3 = 4^3 = 64\ \text{cm}^3$ а запремина лопте $V_l = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}2^3\pi = \frac{32}{3}\pi\ \text{cm}^3$, то је:

$$V_k : V_l = \frac{64}{\frac{32}{3}\pi} = \frac{6}{\pi}.$$

Аналитичка геометрија у равни

Ако појмове геометрије у равни представимо у Декартовом координатном систему, основни појам - тачку посматрамо као уређени пар њених координата $M_1(x_1,\ y_1)$, тада важе следеће формуле:

$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ - (растојање између две тачке)

$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ - (средиште дужи M_1M_2)

$T\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ - (тежиште троугла чија су темена тачке $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$)

$P_\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$ - (површина троугла чија су темена тачке $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$)

$y = kx + n$ - (експлицитни облик једначине праве, $k -$ правац праве, $n -$ одсечак на Y оси)

$y - y_1 = k(x - x_1)$ - (једначина праве кроз једну тачку)

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ - (једначина праве кроз две тачке)

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ - (сегментни облик једначине праве, $p -$ одсечак на X оси, $q -$ одсечак на Y оси)

$Ax + By + C = 0$ - (имплицитни облик једначине праве)

$d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ - (растојање тачке од праве)

$tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ - (угао између две праве)

$k_1 k_2 = -1$ - (услов нормалности две праве)

$k_1 = k_2$ - (услов паралелности две праве)

$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ - (једначина кружнице са центром (p,q) и полупречником r)

$x^2 + y^2 = r^2$ - (једначина централне кружнице)

$r^2(k^2+1) = (kp - q + n)^2$ - (услов додира праве и кружнице)

$(x_0 - p)(x-p) + (y_0 - q)(y-q) = r^2$ - (тангента у тачки круга)

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - (једначина елипсе, са фокусима $F_{1,2} = (\pm e,\ 0)$)

$e^2 = a^2 - b^2$ - (ексцентрицитет елипсе)

$a^2k^2 + b^2 = n^2$ - (услов додира праве и елипсе)

$\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ - (тангента у тачки елипсе)

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - (једначина хиперболе, са фокусима $F_{1,2} = (\pm e,\ 0)$)

$e^2 = a^2 + b^2$ - (ексцентрицитет хиперболе)

$a^2k^2 - b^2 = n^2$ - (услов додира праве и хиперболе)

$\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ - (тангента у тачки хиперболе)

$y^2 = 2px$ - (једначина параболе, са фокусом $F(\frac{p}{2},0)$)

$2kn = p$ - (услов додира праве и параболе)

$y_0 y = p(x + x_0)$ - (тангента у тачки параболе)

56. Одредити m тако да права $mx+y-5=0$ додирује елипсу $9x^2+16y^2=144$.

Решење:

Права $y=kx+n$ додирује елипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ако је $a^2k^2+b^2=n^2$. Како се дата права може записати у облику $y=-mx+5$, а елипса у облику $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ то услов додира постаје $4^2\cdot(-m)^2+3^2=5^2$, одакле је $m^2=1$ па је $m=\pm1$.

57. Одредити једначину кружнице која је концентрична са кружницом $x^2+y^2+6x+2y+5=0$ и садржи тачку $M(1,-4)$.

Решење:

Једначину дате кружнице можемо записати у облику:

$$(x+3)^2+(y+1)^2=5,$$

одакле видимо да је центар кружнице тачка $C(-3,-1)$. Из услова концентричности кружница, једначина тражене кружнице је:

$$(x+3)^2+(y+1)^2=R^2.$$

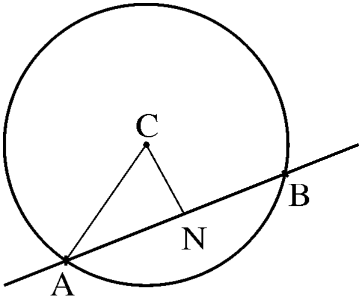
Како тражена кружница садржи M, то је $R^2=(1+3)^2+(-4+1)^2=25$, па је једначина кружнице $(x+3)^2+(y+1)^2=25$.

58. Написати једначину круга са центром $C(3,-1)$, који на правој $2x-5y+18=0$ одсеца тетиву дужине 6.

Решење:

Једначина круга са центром у тачки C има облик:

$$(x-3)^2+(y+1)^2=r^2.$$



Тачка C, подножје нормале из C на дату праву и крајња тачка тетиве, одређују правоугли троугао ANC чија је хипотенуза полупречник круга r. Одстојање тачке C од праве је $d=\sqrt{29}$, па је $r^2=d^2+3^2=38$ и једначина круга: $(x-3)^2+(y+1)^2=38$.

59. Одредити једначину сечице параболе $y^2=4x$ која са параболом образује тетиву са средиштем $S(3,1)$.

Решење:

Једначина произвољне сечице кроз тачку S која није паралелна осама има облик $y-1=k(x-3)$, $k\neq 0$. Координате пресечних тачки сечице и параболе добијамо решавањем система

$$y^2=4x$$

$$y-1=k(x-3).$$

Елиминацијом непознате x долазимо до квадратне једначине:

$$ky^2-4y+4-12k=0.$$

Ако су y_1 и y_2 решења ове једначине, тада је $y_1+y_2=\dfrac{4}{k}$, па је $\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2}{k}$. Како је $\dfrac{y_1+y_2}{2}=1$, јер је $S(3,1)$ средиште тетиве, добијамо $\dfrac{2}{k}=1$, тј. $k=2$, одакле је једначина сечице $y-1=2(x-3)$ тј. $y=2x-5$.

60. Написати једначину тангенте хиперболе $5x^2-7y^2=13$ која је нормална на праву $7x+10y+28=0$.

Решење:

Права $y=kx+n$ додирује хиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ако је $a^2k^2-b^2=n^2$. Како је тангента нормална на праву $7x+10y+28=0$ то ће коефицијент правца тангенте бити $k_t=-\frac{1}{k_p}$, где је $k_p=-\frac{7}{10}$ коефицијент правца дате праве. Дакле, $k_t=\frac{10}{7}$. Једначина хиперболе се може написати у облику $\frac{x^2}{\frac{13}{5}}-\frac{y^2}{\frac{13}{7}}=1$, па из услова додира је: $\frac{13}{5}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^2-\frac{13}{7}=n^2 \Leftrightarrow n^2=\frac{169}{49}$, па је $n_1=\frac{13}{7}$ и $n_2=-\frac{13}{7}$. Као резултат добијамо једначине две тангенте хиперболе:

$$t_1:\quad y=\frac{10}{7}x+\frac{13}{7} \quad \text{и} \quad t_2:\quad y=\frac{10}{7}x-\frac{13}{7}.$$

61. Написати једначину праве која на координатним осама одсеца једнаке одсечке и додирује кружницу $x^2+y^2=18$.

Решење:

Сегментни облик једначине праве је: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ и како треба да буде $p=q$, то је $x+y=p$, односно $y=-x+p$. Услов додира праве и централне кружнице је: $r^2\left(1+k^2\right)=n^2$ одакле је $p^2=36$, односно $p=\pm 6$. Дакле, постоје две такве праве: $p_1:\ y=-x+6$ и $p_2:\ y=-x-6$.

Могући примери задатака за класификациони испит

ПРИМЕР 1

1. Упрошћен израз $\dfrac{(a+b)^2-4}{2a+2b+4}$ има облик:

а) $\dfrac{2a}{a+b}$; б) $\dfrac{a+b}{2}-1$; в) $\dfrac{a+b+2}{2}$.

Решење: б)

2. Решење једначине $3^{x+2}-4\cdot 3^{x+1}+3^{x-1}+24=0$ је:

а) $x=2$; б) $x=-2$; в) $x=0$.

Решење: а)

3. Ако је $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ и $\pi\le\alpha\le\dfrac{3\pi}{2}$ онда је $tg(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$ једнак:

а) $\dfrac{1}{7}$; б) **7** ; в) $-\dfrac{1}{7}$.

Решење: в)

4. Правилни многоугао чији један унутрашњи угао износи 172° је:

а) 40-угао ; б) 45-угао.

Решење: б)

5. Дијагонала правилне четворостране призме је 3, а однос ивице и висине је 2:1. Површина такве призме је:

а) 8 ; б) 16 ; в) 10 .

Решење: б)

ПРИМЕР 2

1. Решење неједначине $(x+4)m^2-(x+1)m+1>0$ за свако $m \in R$ је интервал:

а) $x \in (-\infty, -4)$; б) $x \in (-4, +\infty)$; в) $x \in (-3, 5)$.

Решење: в)

2. Вредност израза $A=\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$ је:

а) 10 ; б) 5 ; в) 20 .

Решење: в)

3. Решење једначине $3+10+17+\ldots+x=345$ је:

а) 55 ; б) 66 ; в) 77 .

Решење: б)

4. У правоуглом троуглу једна катета је 8 cm а друга је 2 cm краћа од хипотенузе. Површина тог троугла је:

а) 60 cm^2 ; б) 40 cm^2 ; в) 80 cm^2 .

Решење: а)

5. Угао под којим се из тачке $A(8,\ 0)$ види елипса $3x^2+y^2=48$ је:

а) 45° ; б) 90° ; в) 0° .

Решење: б)

ПРИМЕР 3

1. Упрошћен израз $\dfrac{ax+a}{x^2-x+1} : \left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3x}{x^3+1}\right)$ има облик:

а) $\dfrac{a+x}{1+x}$; б) $\dfrac{a}{x^3+1}$; в) a.

Решење: в)

2. Решење неједначине $-2<\dfrac{-x^2+5x-7}{x-4}\leq 1$ је:

а) $1\leq x<3$; б) $-1<x<3$; в) $1\leq x\leq 3$.

Решење: в)

3. Ако је $\sin\alpha=0{,}8$ и $\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\pi$ онда је $\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{3})$ једнак:

а) $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$; б) $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$; в) $\dfrac{3}{4}$.

Решење: б)

4. Ако се број страница конвексног многоугла повећа за 5, онда се број дијагонала многоугла повећа за 45. Број страница које има првобитни многоугао је:

а) 8 ; б) 10 ; в) 12 .

Решење: а)

5. Вредност параметра m која обезбеђује да кружница $(x-2m)^2+(y-m)^2=25$ пролази кроз тачку $N(6,4)$ је:

а) $m=1$; б) $m=\dfrac{27}{5}$; в) $m=1$ или $m=\dfrac{27}{5}$.

Решење: в)

ПРИМЕР 4

1. Решење једначине $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$ је:

а) $\sqrt{2}$, 1; б) $\pm\sqrt{2}$, 1; в) $\pm\sqrt{2}$, ± 1.

Решење: в)

2. Вредност израза $A=49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$ је:

а) $\frac{25}{4}$; б) $\frac{25}{2}$; в) $\frac{25}{3}$.

Решење: б)

3. У аритметичком низу за који је $a_1=45$, $n=31$, $S_n=0$ важи да је:

а) $a_n=-45$, $d=-3$; б) $a_n=-45$, $d=3$; в) $a_n=-45$, $d=0$.

Решење: а)

4. Дужине двеју страница троугла су 6 и 9. Једна од висина које одговарају тим страницама је за 5 дужа од друге. Дужине тих висина су:

а) 10 , 12 ; б) 10 , 15; в) 12 , 15.

Решење: б)

5. Права четворострана призма чија је основа ромб са дијагоналама 7,2 и 5,4 има висину једнаку основној ививци призме. Површина такве призме је:

а) 119,88 ; б) 120 ; в) 102,08 .

Решење: а)

ПРИМЕР 5

1. Ако је $A=\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$ а $B=\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\dfrac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)\left(a^{-2}+b^{-2}\right)^{-1}$, онда је $A-B^{-1}$ једнако:

а) $\dfrac{a+b}{ab}$; б) 1; в) 0.

Решење: в)

2. Решење једначине $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$ је:

а) 0 или 1; б) $-\dfrac{1}{2}$ или 0; в) 0 или $\dfrac{1}{2}$.

Решење: в)

3. Ако је $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ тада је $(1+tg\alpha)(1+tg\beta)$ једнако:

а) -2; б) 2; в) 0.

Решење: б)

4. Површина ромба чије се дијагонале разликују за 8 не мења се ако се краћа дијагонала продужи за 3, а дужа скрати за 4. Дужине тих дијагонала су:

а) 12 , 20 ; б) 20 , 28; в) 6 , 14.

Решење: а)

5. Једначина кружнице која је концентрична са кружницом $x^2+y^2+6x+2y+5=0$ и пролази кроз тачку $N(1,-4)$ је:

а) $(x+3)^2+(y+1)^2=25$; б) $(x-3)^2+(y-1)^2=25$;
в) $(x-3)^2+(y+1)^2=25$.

Решење: а)

ПРИМЕР 6

1. Вредност параметра p тако да једно решење једначине $4x^2 - 15x + \frac{p^3}{2} = 0$ буде квадрат другог решења је:

а) -5 или 2; б) 3 или -5; в) -3 или 2.

Решење: б)

2. Вредност израза $A = 10^{1-\log 5} + 10^{2-\log 20} - 10^{3-\log 500}$ је:

а) 5; б) 10; в) 15.

Решење: а)

3. Први члан геометријског низа је $a_1 = 1$. Збир трећег и петог члана је 90. Такав низ има количник једнак:

а) $q = \pm 9$; б) $q = \pm 3$; в) $q = \pm \frac{1}{3}$.

Решење: б)

4. Ако је збир унутрашњих углова многоугла 720°, онда је број дијагонала тог многоугла једнак:

а) 6 ; б) 3 ; в) 9 .

Решење: в)

5. Површина призме, чија је висина 10, основа једнакокраки трапез основица 16 и 10 и са растојањем између основица 4, једнака је:

а) 436; б) 434; в) 464.

Решење: в)

ПРИМЕР 7

1. Вредност параметра m тако да збир квадрата решења једначине $(m+1)x^2-2mx+m-1=0$ буде $\frac{10}{9}$ је:

а) $\frac{1}{2}$ или 2; б) -2 или $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$ или 2.

Решење: а)

2. Решење једначине $3\log x+\frac{1}{2}\log a=3\log b+\log c$ је:

а) $x=\frac{b\sqrt[3]{c}}{\sqrt[6]{a}}$; б) $x=\sqrt[3]{\frac{bc}{a}}$; в) $x=\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}$.

Решење: а)

3. Три броја, чији је збир 57, који чине геометријски низ и за које важи да је средњи члан $\frac{6}{13}$ од збира суседних, су:

а) 10, 20, 27; б) 12, 18, 29; в) 12, 18, 27.

Решење: в)

4. У трапезу је средња линија 2 пута дужа од једне основице и за 7,5 дужа од половине друге основице. Дужине тих основица су:

а) 30 и 45; б) 15 и 30; в) 15 и 45.

Решење: в)

5. Услов да права $Ax+y-5=0$ додирује елипсу $9x^2+16y^2=144$ је да параметар A има вредност:

а) $A=\pm1$; б) $A=\pm2$; в) $A=0$.

Решење: а)

ПРИМЕР 8

1. Упрошћен облик израза $A=\frac{ab^{-2}\cdot(a^{-1}b^{2})^{4}\cdot(ab^{-1})^{2}}{a^{-2}b\cdot(a^{2}b^{-1})^{3}\cdot a^{-1}b}$ за $a=10^{-3}$, $b=10^{-2}$ има вредност једнаку:

а) 10; б) 100; в) 1000.

Решење: б)

2. Решење једначине $\sqrt[x]{64}-5\cdot\sqrt[x]{2^{x+3}}+16=0$ је:

а) 2 или 8; б) 2 или 1; в) 1 или 3.

Решење: в)

3. Вредност израза $A=\cos^{2}18^{\circ}+\cos^{2}36^{\circ}+\cos^{2}54^{\circ}+\cos^{2}72^{\circ}$ је:

а) 1; б) 2; в) 0.

Решење: б)

4. Ако је број дијагонала многоугла једнак 20, онда је збир унутрашњих углова тог многоугла једнак:

а) 1000°; б) 1080°; в) 1120°.

Решење: б)

5. Дужина бочне ивице правилне шестостране пирамиде је два пута већа од основне ивице. Ако је висина пирамиде $4\sqrt{3}$, онда је њена запремина :

а) 100 ; б) 96 ; в) 80 .

Решење: б)

ПРИМЕР 9

1. Вредност параметра m тако да решења једначине $2x^2+5x+2m^2-4m+2=0$ задовољавају услов $x_1-2x_2=-1$ је:

а) 0; б) 2; в) 0 или 2.

Решење: в)

2. Ако је $\log_{25} 7 = a$ и $\log_2 5 = b$, онда је $\log_{\sqrt[3]{5}} 6{,}125$ једнак:

а) $12a-\frac{9}{b}$; б) $12a+\frac{9}{b}$; в) $12a-\frac{b}{9}$.

Решење: а)

3. Тринаести члан аритметичког низа -2, -6, -10,... је:

а) 50; б) -26; в) -50.

Решење: в)

4. Ако је укупан број дијагонала многоугла једнак 20, онда је број дијагонала које полазе из једног темена тог многоугла једнак:

а) 4; б) 5; в) 6.

Решење: б)

5. Површина осног пресека ваљка је 16. Ако је полупречник ваљка два пута већи од висине, онда је површина тог ваљка :

а) 32π; б) 36π; в) 48π.

Решење: в)

ПРИМЕР 10

1. Упрошћен израз $\left(\dfrac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}-\dfrac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$ има вредност једнаку:

а) $2b$; б) $2a$; в) $2a+2b$.

Решење: а)

2. Решење једначине $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x+(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x=10$ је:

а) ± 1; б) ± 2; в) ± 3.

Решење: б)

3. Упрошћен израз $\dfrac{1+tg^4x}{tg^2x+ctg^2x}$ има облик:

а) tg^2x; б) ctg^2x; в) tg^4x.

Решење: а)

4. У једнакокраком троуглу збир трећине угла при врху и половине једног од углова на основици износи 48°. Углови тог троугла су:

а) $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$; б) $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$; в) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.

Решење: б)

5. Услов да права $2x+y+m=0$ буде тангента кружнице $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ је да параметар m има вредност:

а) $m=-3-2\sqrt{5}$; б) $m=-3\pm 2\sqrt{5}$; в) $m=-3+2\sqrt{5}$.

Решење: б)

ПРИМЕР 11

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}+\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}$ је:

а) $1-\sqrt{7}$; б) $1+\sqrt{7}$; в) $(1+\sqrt{7})^2$; г) 25; д) 0.

Решење: г)

2. Ако је $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$ тада је $\log_{45} 100$ једнак:

а) $\frac{2a+2}{2b+1}$; б) $\frac{b+1}{a+2}$; в) $a-b$; г) $\frac{20}{9}$; д) ни један од ових одговора.

Решење: а)

3. Израз $\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{2-\sin 2x}$ идентички је једнак:

а) $\cos(x-\frac{\pi}{4})$; б) $\frac{\cos x+\sin x}{2}$; в) $\sin(x-\frac{\pi}{4})$; г) 1; д) 0.

Решење: б)

4. Бројеви a_1, a_2, a_3 чине геометријску прогресију. Ако је $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 343$ и $a_2 - a_1 = 5$ тада је $a_1+a_2+a_3$ једнако:

а) 7; б) $\frac{49}{2}$; в) $\frac{67}{2}$; г) $\frac{67}{3}$; д) 100.

Решење: в)

5. Запремина правилне тростране пирамиде чија је основна ивица $a = 3\sqrt{3}$ и бочна ивица $s = 5$ једнака је:

а) 4; б) $9\sqrt{3}$; в) $3\sqrt{3}$; г) 36; д) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Решење: б)

ПРИМЕР 12

1. Ако је $a \in R \setminus \{1\}$ тада је израз $\dfrac{4a^2+9a+5}{a^3-1} - \dfrac{1-2a}{a^2+a+1} - \dfrac{6}{1-a}$ једнак:

а) $\dfrac{a+1}{a-1}$; б) 6; в) $\dfrac{12}{a-1}$; г) a^2; д) $1+a^2$.

Решење: в)

2. Збир корена једначине $4x^2+5-8x=0$ једнак је:

а) 8; б) -5 ; в) $-\dfrac{5}{4}$; г) -2 ;

д) ни један од ових одговора.

Решење: д)

3. Укупан број дијагонала правилног многоугла чији је унутрашњи угао три пута већи од суседног спољашњег угла је:

а) 20; б) 44; в) 18; г) 54; д) 28.

Решење: а)

4. Правоугли троугао чија је хипотенуза $13\,\text{cm}$ и једна катета $12\,\text{cm}$ ротира око те катете. Запремина тако насталог тела једнака је:

а) $90\pi\ \text{cm}^3$; б) $100\pi\ cm^3$; в) $314\ \text{cm}^3$; г) $\dfrac{25}{3}\pi$; д) $100\ \text{cm}^3$.

Решење: б)

5. Једначина тангенте повучена из тачке $A(6,8)$ на параболу $y^2=8x$ једнака је:

а) $y=2x+1$; б) $x+y+2=0$; в) $\dfrac{1}{3}x+y=3$;

г) $x-y-2=0$; д) ни један од ових одговора.

Решење: д)

ПРИМЕР 13

1. Ако је $x=\left(\frac{2}{a-1}\right)^{-1}$ тада је вредност израза $\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}}\cdot\left(1-\frac{2x-1}{x}\right)$ једнака:

а) $\frac{1+a}{1-a}$; б) 0 ; в) $\frac{1-a}{1+a}$; г) $a-1$; д) 1 .

Решење: а)

2. Решење једначине $3^{12x-1}-9^{6x-1}-27^{4x-1}+81^{3x+1}=2192$ је:

а) 1 ; б) 0 ; в) -2 ; г) $\frac{1}{2}$;

д) ни један од ових одговора.

Решење: д)

3. Израз $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$ за $\alpha\neq k\pi$ идентички је једнак:

а) $tg^2\frac{\alpha}{2}$; б) $ctg\alpha$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin\frac{\alpha}{2}$; д) 0 .

Решење: а)

4. Збир првих 50 чланова аритметичког низа је 200, а збир следећих 50 чланова је 2700. Први члан низа је:

а) 3 ; б) 122; в) -21,5; г) -20,5; д) 3,5 .

Решење: г)

5. Полупречник лопте увећан је за 50%. Тада се површина лопте повећава за:

а) 50% ; б) 100% ; в) 25% ; г) 225% ; д) 125% .

Решење: д)

ПРИМЕР 14

1. Збир $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-1}+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}$ једнак је:

а) $2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; г) 3; д) 0.

Решење: б)

2. Ако су x_1, x_2 решења једначине $3x^2-x-7=0$ тада је $x_1^3\cdot x_2^3$ једнако:

а) $\left(\frac{4}{3}\right)^3$; б) $\frac{193}{27}$; в) $-\left(\frac{7}{3}\right)^3$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; д) $\left(\frac{7}{3}\right)^3$.

Решење: в)

3. Ако је полупречник описане кружнице око једнакостраничног троугла $R=2\sqrt{3}$, тада је површина тог троугла једнака:

а) 36; б) $9\sqrt{3}$; в) 12; г) 27; д) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Решење: б)

4. Ако је површина базе правилне четворостране пирамиде $144\ \mathrm{cm}^2$ а површина омотача $192\ \mathrm{cm}^2$, тада је збир свих ивица те пирамиде једнак:

а) $88\ \mathrm{cm}$; б) $12\ \mathrm{cm}$; в) $40\ \mathrm{cm}$; г) $48\ \mathrm{cm}$; д) $20\ \mathrm{cm}$.

Решење: а)

5. Једначина праве која пролази кроз пресек правих $x+y-1=0$ и $2x-y-5=0$ и нормалана је са правом $3x-y-2=0$ гласи:

а) $y=3x-1$; б) $x+y+2=0$; в) $y=\frac{1}{3}x+3$; г) $x+3y+1=0$; д) $y=3x+1$.

Решење: г)

ПРИМЕР 15

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{a-3b}-\frac{1}{a+3b}+\frac{6b}{a^2-9b^2}\right):\frac{b(2a+b)}{a^2-9b^2}$ за $a=0{,}003$ и $b=5{,}994$ једнака је:

а) -2; б) $6{,}124$; в) $5{,}997$; г) 2; д) $-1{,}2$.

Решење: г)

2. Производ решења једначине $\sqrt{x^2-9}+x^2-9=20$ је:

а) 25 ; б) 0 ; в) - 25 ; г) 1 ; д) 20 .

Решење: в)

3. Решења једначине $\sin x+\cos 2x=1$ су:

а) $x=k\pi$; б) $x_1=k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x_3=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$;

в) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; г) $x=2k\pi$; д) $x=\frac{k\pi}{2}$.

Решење: б)

4. Збир три узастопна члана аритметичког низа је 54. Ако је највећи од њих два пута већи од најмањег, тада је производ та три броја једнак:

а) 2000 ; б) 5184; в) 9832 ; г) 368 ; д) 1154.

Решење: б)

5. Обим већег дијагоналног пресека правилне шестостране призме је 22 cm. Висина призме је за 1cm краћа од основне ивице. Запремина те призме је:

а) 72 cm^3; б) $72\sqrt{3}\text{ cm}^3$; в) 64 cm^3 ; г) $72\pi\text{ cm}^3$; д) $48\sqrt{3}\text{ cm}^3$.

Решење: б)

ПРИМЕР 16

1. Ако је $f(1-x)=3-2x$ тада је $f(x)$ једнако:

а) $2x+1$; б) $8-x$; в) $2x+3$; г) $1-x$; д) $x+3$.

Решење: а)

2. Скуп решења неједначине $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}\geq 1$ је :

а) $(-\infty,-1]\cup(3,+\infty)$; б) $(-1,+\infty)$; в) $(3,+\infty)$;
г) $(-1,3)$; д) $(-1,3)\cup(3,+\infty)$.

Решење: д)

3. Решења једначине $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ су:

а) $x_1=4,\ x_2=8$; б) $x=3$; в) $x_1=3,\ x_2=9$;
г) $x_1=3,\ x_2=11$; д) $x_1=11,\ x_2=15$.

Решење: г)

4. Тетива круга је за 2 cm мања од пречника, а одстојање центра круга од тетиве је за 2 cm мање од полупречника. Дужина тетиве је:

а) 5 cm; б) 8 cm; в) 12 cm; г) 1 cm; д) 10 cm.

Решење: б)

5. Једначина круга чији је центар тачка $C(0,4)$ и садржи тачку $(5,-8)$ је:

а) $x^2+(y-4)^2=144$; б) $x^2+(y-4)^2=169$;

в) $(x-4)^2+y^2=169$; г) $(x-5)^2+(y+8)^2=10$.

Решење: б)

ПРИМЕР 17

1. Вредност израза $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}$ једнака је:

а) -1; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) $\sqrt{3}+3$; д) $\sqrt{3}+2$.

Решење: в)

2. Збир решења једначине $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=\sqrt{2x-8}$ је:

а) 10 ; б) 12 ; в) 14 ; г) 0 ; д) 1 .

Решење: в)

3. Скуп решења неједначине $\left|\frac{2x+3}{2x-3}\right|<1$ је :

а) $(0,+\infty)$; б) $(-\infty, 0)$; в) $(3, 4)$; г) $(-2, 3)$; д) $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$.

Решење: б)

4. Количник геометријског низа који се састоји од шест чланова, чији је збир прва три члана 168, а збир последња три 21, је :

а) 2 ; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) -2 .

Решење: б)

5. Висина купе је $12\ \text{cm}$, а површина осног пресека је $42\ \text{cm}^2$. Површина те купе је:

а) $56\pi\ \text{cm}^2$; б) $49\pi\ \text{cm}^2$; в) $56\ \text{cm}^2$;

г) $49\ \text{cm}^2$; д) $36\pi\ \text{cm}^2$.

Решење: а)

ПРИМЕР 18

1. Производ решења једначине $|3x-2|+x=2$ је:

а) 1; б) 0; в) 2; г) -1; д) -2 .

Решење: б)

2. Решења једначине $\sin\frac{x}{2}+\cos x=1$ су:

а) $x=k\pi$; б) $x_1=2k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{3}+4k\pi$, $x_3=\frac{5\pi}{3}+4k\pi$;

в) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; г) $x=2k\pi$; д) $x=\frac{k\pi}{2}$.

Решење: б)

3. Решење једначине $25^{\sqrt{x}}-124\cdot 5^{\sqrt{x}}=125$ је:

а) $x_1=-3,\ x_2=3$; б) $x=9$; в) $x_1=3,\ x_2=5$;

г) $x_1=4,\ x_2=5$; д) ни један од ових одговора .

Решење: б)

4. Хипотенуза c и катета a правоуглог троугла су узастопни природни бројеви. Квадрат друге катете је:

а) $c\cdot a$; б) $\frac{c}{a}$; в) $c+a$; г) $c-a$; д) ни један од ових одговора.

Решење: в)

5. Координате центра и полупречник круга чија је једначина $x^2+y^2-4y-21=0$ су:

а) $C(0,0)$, $r=25$; б) $C(2,2)$, $r=5$; в) $C(0,2)$, $r=5$;

г) $C(0,2)$, $r=25$; д) ни један од ових одговора .

Решење: в)

ПРИМЕР 19

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}\right):\frac{1}{\sqrt{3}}$ једнака је:

а) 6 ; б) $\frac{1}{2}$; в) 4; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{3}+2$.

Решење: а)

2. Ако m људи ураде један посао за d дана, тада ће $m+r$ људи урадити тај исти посао за :

а) $d+r$ дана ; б) $d-r$ дана ; в) $\frac{md}{m+r}$ дана ;

г) $\frac{d}{m+r}$ дана ; д) $\frac{d}{m-r}$ дана .

Решење: в)

3. Производ решења једначине $\log_x 3+\log_3 x=\log_{\sqrt{x}} 3+\log_3 \sqrt{x}+\frac{1}{2}$ је:

а) 9 ; б) 3 ; в) $\frac{1}{3}$; г) 27 ; д) -2 .

Решење: б)

4. Почетна три члана аритметичког низа су $x-1$, $x+1$, $2x+3$ и то у датом редоследу. Тада је x једнако:

а) 2 ; б) 0; в) -2; г) 4;

д) ни један од ових одговора .

Решење: б)

5. Растојање центра кружнице $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ од тачке $M(-1,2)$ је:

а) -1; б) 1; в) 2; г) $\sqrt{2}$; д) 0 .

Решење: д)

ПРИМЕР 20

1. Ако се израз $\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{ab-b^2}{ab-a^2}$, под условима $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$, сведе на најпростији случај, добија се:

а) a^2; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $a-2b$; г) $\dfrac{a^2-2b^2}{ab}$; д) b^2 .

Решење: б)

2. Корени једначине $3(m-1)x^2-4(m-1)x+2m-1=0$ задовољавају услов $x_2=3x_1$ за :

а) $m=3$; б) $m=0$; в) $m=\dfrac{3}{2}$; г) $m=\dfrac{4}{3}$; д) $m=1$.

Решење: б)

3. Вредност израза $\dfrac{\cos 2\alpha-\cos\alpha}{\sin(\alpha+15^\circ)+\sin\alpha}$ за $\alpha=30^\circ$ је:

а) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-1$; в) $\sqrt{6}+2$.

Решење: б)

4. Ако дужу страницу правоугаоника повећамо за 10% а другу смањимо за 10%, тада се површина правоугаоника :

а) смањи за 10% ; б) повећа за 10% ; в) не мења ;

г) смањи за 1% ; д) повећа за 1% .

Решење: г)

5. Запремина квадра чији је однос ивица $3:4:12$, а дијагонала $D=26$ cm, једнака је:

а) $1152\ \text{cm}^3$; б) $768\ \text{cm}^3$; в) $1156\ \text{cm}^3$; г) $1134\ \text{cm}^3$;
д) $932\ \text{cm}^3$.

Решење: а)

2011.

Задатак 1.

Вредност израза $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\left(\sqrt{6}+11\right)^{-1}$ је:

а) 2 ; б) -115 ; ц) 100 ; д) -100 .

Решење:

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\left(\sqrt{6}+11\right)^{-1}=$$

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}\cdot\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}-1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}\cdot\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\cdot\frac{3+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}\right)\cdot:\frac{1}{\sqrt{6}+11}=$$

$$\left(\frac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}+\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-4}-\frac{12\left(\sqrt{6}+3\right)}{9-6}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=6-121=-115\,.$$

Одговор: б)

Задатак 2.

Производ решења једначине $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}} 2=\log_{\frac{x}{64}} 2$ је:

а) 32 ; б) 6; ц) 1 ; д) -6 .

Решење:

Примењујући правила о промени основе логаритма и о логаритму количника, добија се једначина облика:

$$\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 x-\log_2 16}=\frac{1}{\log_2 x-\log_2 64}\;\Leftrightarrow\;\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 x-4}=\frac{1}{\log_2 x-6}\;.$$

Увођењем смене $\log_2 x=t$ добија се:

$$\frac{1}{t(t-4)}=\frac{1}{t-6}\Leftrightarrow t^2-4t=t-6\Leftrightarrow t^2-5t+6=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} t_1=3\Leftrightarrow \log_2 x=3\Leftrightarrow x_1=2^3=8\\ t_2=2\Leftrightarrow \log_2 x=2\Leftrightarrow x_1=2^2=4\end{cases}$$

Како су решења дате једначине $x_1=8$ и $x_2=4$, то је њихов производ $x_1\cdot x_2=32$.

Одговор: а)

Задатак 3.

Упрошћен израз $\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{2+\sin 2x}$ је:

а) 2 ; б) $\dfrac{\cos x+\sin x}{2}$; ц) $\dfrac{\cos x-\sin x}{2}$; д) 1 .

Решење:

Користећи формулу за разлику кубова, основни тригонометријски идентитет $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и формулу $\sin 2x=2\sin x\cos x$ добија се:

$$\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{2+\sin 2x}=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x)}{2+2\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)}{2(1+\sin x\cos x)}=\frac{\cos x-\sin x}{2}\ .$$

Одговор: ц)

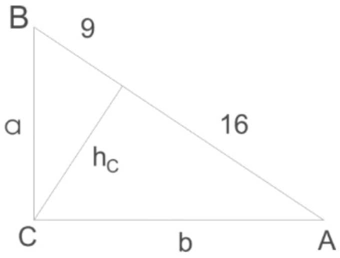
Задатак4.

Висина хипотенузе дели хипотенузу на одсечке дужина $9\,\mathrm{cm}$ и $16\,\mathrm{cm}$. Обим уписане кружнице датог правоуглог троугла је:

а) 10π cm ; б) 100π cm ; ц) 5π cm ; д) 25π cm .

Решење:

Како су одсечци хипотенузе дати то је хипотенуза $c=9\,\mathrm{cm}+16\,\mathrm{cm}=25\,\mathrm{cm}$. Висина је поделила дати троугао на два правоугла троугла, у којима се применом Питагорине теореме могу изразити катете датог троугла:



$$a^2 = 9^2 + h_c^2 \quad \text{и} \quad b^2 = 16^2 + h_c^2 .$$

Како је $c^2 = a^2 + b^2$ и $c = 25\,\text{cm}$, то се сабирањем ових једнакости добија:

$$25^2 = 9^2 + 16^2 + 2h_c^2 ,$$

одакле је $h_c = 12\,\text{cm}$, па је $a = 20\,\text{cm}$ и $b = 15\,\text{cm}$.

Како је полупречник уписане кружнице правоуглог троугла $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, то је $r = 5\,\text{cm}$, па је обим уписане кружнице $O = 2r\pi = 10\pi\ \text{cm}$.

Одговор: а)

Задатак 5.

Основна ивица правилне четворостране пирамиде је $a = 6\,\text{cm}$, а површина омотача $M = 60\,\text{cm}^2$. Запремина те пирамиде је :

а) $48\,\text{cm}^3$; б) $60\,\text{cm}^3$; ц) $36\,\text{cm}^3$; д) $120\,\text{cm}^3$.

Решење:

Како је омотач правилне четворостране пирамиде $M = 2ah_a = 60\,\text{cm}^2$ и $a = 6\,\text{cm}$, то је апотема $h_a = 5\,\text{cm}$. Из правоуглог троугла који повезује апотему, висину пирамиде и полупречник уписане кружнице основе пирамиде, је $H^2 = h_a^2 - r^2$, а како је у основи квадрат, то је полупречник уписане кружнице једнак половини странице, $r = \dfrac{6}{2}\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$ то је $H = 4\,\text{cm}$. Тражена запремина пирамиде је: $V = \dfrac{1}{3}BH = \dfrac{1}{3}a^2H = \dfrac{1}{3}\cdot 36\cdot 4 = 48\,\text{cm}^3$.

Одговор: а)

Задатак 1.
Вредност израза $\left(\frac{1}{2x+2y}-\frac{3x-y}{x^2-y^2}+\frac{5}{3x-3y}-\frac{25y-17x}{6x^2-6y^2}\right):\frac{2}{x+y}$

1) 2 2) 1 3) xy 4) $x+y$

Решење:

Растављајући имениоце на чиниоце , израз постаје:

$$\left(\frac{1}{2(x+y)}-\frac{3x-y}{(x-y)(x+y)}+\frac{5}{3(x-y)}-\frac{25y-17x}{6(x-y)(x+y)}\right):\frac{2}{x+y}=$$

$$\left(\frac{3(x-y)}{6(x-y)(x+y)}-\frac{6(3x-y)}{6(x-y)(x+y)}+\frac{5\cdot 2\cdot(x+y)}{6(x-y)(x+y)}-\frac{25y-17x}{6(x-y)(x+y)}\right):\frac{2}{x+y}=$$

$$\left(\frac{3x-3y-18x+6y+10x+10y-25y+17x}{6(x-y)(x+y)}\right):\frac{2}{x+y}=$$

$$\left(\frac{12x-12y}{6(x-y)(x+y)}\right):\frac{2}{x+y}=\frac{12(x-y)}{6(x-y)(x+y)}:\frac{2}{x+y}=\frac{2}{x+y}:\frac{2}{x+y}=1,\ x\neq\pm y$$

Одговор: 2)

Задатак 2.
Збир решења једначине $(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$ и вредности израза $3\log_3 81+2\log_2\frac{1}{32}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}+\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{4}$ је :

1) 3 2) 2 3) 7 4) 6

Решење:

За >0, дата једначина еквивалентна је једначини $(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$, увођењем смене $\log_2 x=t$, добија се квадратна једначина $t^2-3t+2=0$, чија су решења $t_1=1$, $t_2=2$, одакле су решења полазне једначине $x_1=2, x_2=4$.
На основу особина логаритама $\log_a b^s=s\log_a b$ и $\log_{a^s} b=\frac{1}{s}\log_a b$ је $\log_3 81=\log_3 3^4=4$, $\log_2\frac{1}{32}=$

$\log_2 2^{-5} = -5, \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3, \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{4} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-2} = -4.$

Отуда је: $3\log_3 81 + 2\log_2\frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27} + \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{4} = 3\cdot 4 + 2\cdot(-5) + 3 - 4 = 1.$

Одакле је збир решења дате једначине и вредности датог израза 2+4+1=7.

Одговор: 3)

Задатак 3.

Решења једначине $3 - 4(\sin 3x)^2 = 0$ на интервалу $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ су:

1) $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$ 2) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}$ 4) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини: $(\sin 3x)^2 = \frac{3}{4}$, одакле је $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решења ових једначина су:

$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi$ и $3x = \frac{4\pi}{3} + 2m\pi \vee 3x = \frac{5\pi}{3} + 2s\pi$, одакле је:

$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{93} + \frac{2l\pi}{3}$ и $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2m\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2s\pi}{3}, k, l, m, s \in Z$. Како решења треба одредити на интервалу $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ то је $x = \frac{\pi}{9} \vee x = \frac{2\pi}{9} \vee x = \frac{4\pi}{9} \vee x = \frac{5\pi}{9}$.

Одговор: 3)

Задатак 4.

Збир првих 120 парних природних бројева је :

1) 240 2) 14520 3) 18220 4) 1452

Решење:

Како парни природни бројеви чине аритметички низ, где је ралика свака два суседна члана $d = 2$ и први члан $a_1 = 2$ то се из формуле за првих n чланова аритметичког низа $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$ добија $S_{120} = \frac{120}{2}(2\cdot 2 + (120-1)\cdot 2) = 60\cdot(4 + 238) = 14520.$

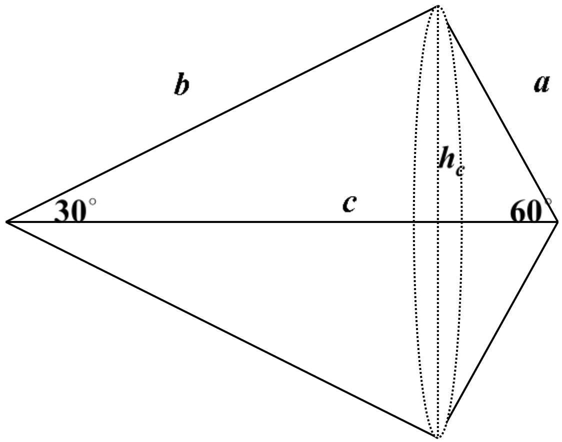
Одговор: 2)

Задатак 5.

Хипотенуза правоуглог троугла је 4, а један оштар угао 30°. Запремина тела које настаје ротацијом троугла око хипотенузе је :

1) 4π 2) 72π 3) $24\sqrt{3}$ 4) $64\sqrt{3}\pi$

Решење:



Ротацијом троугла око хипотенузе настаје тело које се састоји од две купе спојене базама . Отуда је запремина тако добијеног тела:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}r^2\pi H_1 + \frac{1}{3}r^2\pi H_2 = \frac{1}{3}r^2\pi(H_1 + H_2)$$

Како је збир висина ове две купе једнак хипотенузи датог троугла то је $\frac{1}{3}r^2\pi c$.

Полупречник основа купа је висина датог троугла која одговара хипотенузи и може се израчунати из обрасца за површину правоуглог троугла: $P = \frac{ab}{2} = \frac{ch_c}{2}$. Како се у правоуглом троуглу наспрам угла од 30° налази катета једнака половини хипотенузе то је $a = 2$, а на основу Питагорине теореме $b = 2\sqrt{3}$, па је $r = h_c = \sqrt{3}$. Коначно запремина тела биће једнака: $V = \frac{1}{3}r^2 c = \frac{1}{3}\sqrt{3}^2\pi \cdot 4 = 4\pi$.

Одговор: 1)

Задатак 1.
Вредност израза

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\frac{2x-5}{x-4}\right)\cdot\left(\frac{5}{x-4}\right)^{-1}$$

је:

А) 2 ; Б) $\sqrt{x}-2$; В) $\sqrt{x}$; Г) 1 .

Решење:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\frac{2x-5}{x-4}\right)\cdot\left(\frac{5}{x-4}\right)^{-1}=$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\cdot\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}-\frac{2x-5}{x-4}\right)\cdot\left(\frac{x-4}{5}\right)=$$

$$\left(\frac{x+2\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}-2x+5}{x-4}\right)\cdot\left(\frac{x-4}{5}\right)=\left(\frac{5}{x-4}\right)\cdot\left(\frac{x-4}{5}\right)=1$$

$$(x\geq 0\,,x\neq 4).$$

Одговор: Г)

Задатак 2.
Производ решења једначине $\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^{x}+\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^{x}=8$ је:

А) -9 ; Б) 1 ; В) -6 ; Г) 0 .

Решење:

$\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^{x}+\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^{x}=8 \iff \left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{3}}+\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{3}}=8$. Како је $\left(4-\sqrt{15}\right)\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)=1$, тј. $\left(4-\sqrt{15}\right)=\left(4+\sqrt{15}\right)^{-1}$, увођењм смене $\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{3}}=t$ једначина постаје $\frac{1}{t}+t=8 \iff t^2-8t+$

$1 = 0$. Решења ове једначине су $t_1 = \left(4-\sqrt{15}\right) = \left(4+\sqrt{15}\right)^{-1}$, $t_2 = \left(4+\sqrt{15}\right)$, те је $\frac{x}{3} = -1 \lor \frac{x}{3} = 1$. Отуда, решења полазне једначине су $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, те је њихов производ $x_1 \cdot x_2 = -9$.

Одговор: А)

Задатак 3.

Број решења једначине $\cos 4x - 3\sin 2x = -1$ на интервалу $(0, \pi)$ је :

А) 4 ; Б) 0 ; В) 3 ; Г) 2 .

Решење:

$$\cos 4x - 3\sin 2x = -1 \iff 1 + \cos 4x - 3\sin 2x = 0 \iff$$
$$2\cos^2 2x - 3\sin 2x = 0 \iff 2(1-\sin^2 2x) - 3\sin 2x = 0 \iff 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 2 = 0$$

Решења последње једначине по $\sin 2x$ су -2 и $\frac{1}{2}$, а како је $-1 \le \sin 2x \le 1$, то је $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Отуда је $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \lor 2x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ ($k, l \in \mathrm{Z}$), те је $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \lor x = \frac{5\pi}{12} + l\pi$ ($k, l \in \mathrm{Z}$).

Како се траже решења на интервалу $(0, \pi)$ то је $x = \frac{\pi}{12} \lor x = \frac{5\pi}{12}$. Дакле број решења дате једначине на интервалу $(0, \pi)$ је 2.

Одговор: Г)

Задатак 4.

Површина кружног прстена, део између описаног и уписаног круга правилног шестоугла странице a, је $4\pi cm^2$. Површина тог шестоугла (у cm^2) *је* :

А) $24\sqrt{3}$; Б) $2\sqrt{3}$; В) 4 ; Г) 16 .

Решење:

Означимо са R, r полупречник описаног и уписаног круга респективно. Тада је $R = a$, $r = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Како је површина кружног прстена $(R^2 - r^2)\pi = 4\pi$, то је $\left(a^2 - \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\pi = 4\pi$, одакле је $a = 4cm$. Тражена површина шестоугла је $P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$.

Одговор: А)

Задатак 5.

Запремина праве призме чија је основа ромб је 240 cm^3. Површине дијагоналних пресека су 60 cm^2 и 80 cm^2. Површина те призме је:

А) $24\sqrt{3}\ cm^2$; Б) $72\sqrt{3}\ cm^2$; В) 480 cm^2; Г) 248 cm^2.

Решење:

Нека су d_1 , d_2 дијагонале ромба, $P_1 = d_1 \cdot H$, $P_2 = d_2 \cdot H$ површине дијагоналних пресека призме висине H. Површина основе $B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Запремина ове призме је $V = \frac{d_1 . d_2}{2}\ H$, одакле је $d_1 \cdot d_2 \cdot H = 2V$, те је $P_1 \cdot P_2 = 2V \cdot H$, а одатле заменом датих вредности добијамо $H = 10cm$. Из $P_1 = d_1 \cdot H \Longrightarrow d_1 = \frac{P_1}{H} = \frac{60}{10} = 6cm$, $d_2 = \frac{P_2}{H} = \frac{80}{10} = 8cm$. Како је $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ то је $a = 5\ cm$. Тражена површина призме је $P = 2B + M = d_1 \cdot d_2 + 4aH$, одакле је $P = 248cm^2$.

Одговор: Г)

2014.

Задатак 1.

Вредност израза $\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 - \left(4-2\sqrt{3}\right)^{-1} - \left(4+2\sqrt{3}\right)^{-1}$ је:

А) 2 ; Б) 16 ; В) $4\sqrt{3}$; Г) 10.

Решење:

На основу формуле за квадрат збира

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 = 4-2\sqrt{3}+2\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}+4+2\sqrt{3}$$

и формуле за разлику квадрата

$$\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)} = \sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16-12} = \sqrt{4} = 2$$

следи да је

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 = 12$$

Како је

$$\left(4-2\sqrt{3}\right)^{-1}=\frac{1}{4-2\sqrt{3}}=\frac{1}{4-2\sqrt{3}}\cdot\frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}$$

и

$$\left(4+2\sqrt{3}\right)^{-1}=\frac{1}{4+2\sqrt{3}}=\frac{1}{4+2\sqrt{3}}\cdot\frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}=\frac{4-2\sqrt{3}}{4}$$

то је

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^{2}-\left(4-2\sqrt{3}\right)^{-1}-\left(4+2\sqrt{3}\right)^{-1}=12-\frac{4+2\sqrt{3}}{4}-\frac{4-2\sqrt{3}}{4}$$

$$=12-\frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{4}=12-\frac{8}{4}=12-2=10.$$

Одговор: Г)

Задатак 2.

Производ решења једначине $8^{|1-3x|}=4^{2-3x}$ је:

А) $-\frac{7}{45}$ Б) $-\frac{1}{15}$; В) $\frac{1}{3}$; Г) 0 .

Решење:

Како је $|1-3x|=\begin{cases}1-3x \text{ за } x\le\frac{1}{3}\\ 3x-1 \text{ за } x>\frac{1}{3}\end{cases}$ то је за $x\le\frac{1}{3}$ дата једначина еквивалентна једначини: $2^{3\cdot(1-3x)}=2^{2\cdot(2-3x)}$. Отуда је $3-9x=4-6x$, односно $x=-\frac{1}{3}$. За $x>\frac{1}{3}$ дата једначина еквивалентна је једначини: $2^{3\cdot(3x-1)}=2^{2\cdot(2-3x)}$, одакле је $9x-3=4-6x$, те је $x=\frac{7}{15}$. Како су решења дате једначине $x_1=-\frac{1}{3}$ и $x_2=\frac{7}{15}$ то је њихов производ $x_1\cdot x_2=-\frac{7}{45}$.

Одговор: А)

Задатак 3.

Збир решења једначине $\cos x+\sin\frac{x}{2}=1$ на интервалу $(0,4\pi]$ је :

А) 4π ; Б) 2π ; В) 6π; Г) 8π .

Решење:

Дата једначина еквивалентна је са $\sin\frac{x}{2}=1-\cos x$. Како је $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ то је

$sin\frac{x}{2} - 2\,sin^2\frac{x}{2} = 0$, тј. $sin\frac{x}{2}\cdot\left(1 - 2\,sin\frac{x}{2}\right) = 0$. Одатле је $sin\frac{x}{2} = 0 \vee sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, те је $\frac{x}{2} = k\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2s\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $k, s, n\epsilon Z$. Зато је $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 4s\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 4n\pi$, $k, s, n\epsilon Z$. Како се траже решења на интервалу $(0{,}4\pi]$, то је $x = 2\pi \vee x = 4\pi \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$, а одатле је њихов збир једнак 8π .

Одговор: Г)

Задатак 4.

Око круга пречника $15cm$ описан је једнакокраки трапез, површине $255cm^2$. Збир нумеричких вредности обима и површине овог трапеза је:

А) 323 ; Б) 516 ; В) 355 ; Г) 426 .

Решење:

Нека су a и b основице , c крак , а h висина датог трапеза. Приметимо да је пречник једнак висини. Како је дати трапез тангентни четвороугао, то је збир основица једнак збиру кракова тј. $a + b = 2c$. Како је површина трапеза $P = \frac{a+b}{2}\cdot h$, то знајући површину и висину можемо одредити збир основица, тј. $a + b = \frac{2P}{h} = \frac{2\cdot 255cm^2}{15cm} = 34cm$. Како је обим једнакокраког трапеза $O = a + b + 2c$, то је $O = 68\ cm$, отуда је збир нумеричких вредности обима и површине 68+255=323.

Одговор: А)

Задатак 5.

Запремина ваљка је $180\pi cm^3$. Површина осног пресека је $120cm^2$. Површина тог ваљка је :

А) $138\pi cm^2$; Б) $90\pi cm^2$; В) $480cm^2$; Г) $60cm^2$.

Решење:

Означимо са r полупречник основе ваљка и са H висину. Како је површина осног пресека $Q = 2rH \Longrightarrow rH = \frac{Q}{2} = 60cm^2$. Запремина ваљка је $V = r^2\pi H$, тј $180\pi cm^3 = r\pi\cdot rH = r\pi 60cm^2$, одакле је $r = 3cm$ и $H = \frac{Q}{2r} = \frac{120cm^2}{2\cdot 3cm} = 20cm$. Површина ваљка је $P = 2r\pi\cdot(r + H) = 2\cdot 3\cdot\pi\cdot(3 + 20) = 138\pi cm^2$.

Одговор: А)

Задатак 1.
У скупу целих бројева збир решења једначине $|2x-3|-|x+2|=3-x$ је:

А) 2 ; Б) 0 ; В) -1 ; Г) 3.

Решење:

Како је $|2x-3|=\begin{cases}2x-3, & x\geq\frac{3}{2}\\ 3-2x, & x<\frac{3}{2}\end{cases}$ и $|x+2|=\begin{cases}x+2, & x\geq-2\\ -2-x, & x<-2\end{cases}$, то x може припадати следећим интервалима $(-\infty\,,-2)$; $\left[-2,\frac{3}{2}\right)$; $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$. Разликујемо три случаја:
1) $x<-2$, 2) $-2\leq x<\frac{3}{2}$, 3) $x\geq\frac{3}{2}$.

	$x<-2$	$-2\leq x<\frac{3}{2}$	$x\geq\frac{3}{2}$
$\lvert 2x-3\rvert$	$3-2x$	$3-2x$	$2x-3$
$\lvert x+2\rvert$	$-2-x$	$x+2$	$x+2$

1) За $x\in(-\infty\,,-2)$ дата једначина еквивалентна је једначини $3-2x-(-2-x)=3-x\Leftrightarrow 5-x=3-x$, па једначина у овом случају нема решења.
2) За $x\in\left[-2,\frac{3}{2}\right)$ дата једначина постаје $3-2x-(x+2)=\ 3-x\Leftrightarrow 1-3x=3-x\Leftrightarrow -2x=2\Leftrightarrow x=-1$.
3) За $x\in\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ дата једначина еквивалентна је једначини

$$2x-3-(x+2)=\ 3-x\Leftrightarrow x-5=3-x\Leftrightarrow 2x=8\Leftrightarrow x=4.$$

Дакле, $x=-1$ и $x=4$ су решења полазне једначине, па је збир решења -1+4=3.

Одговор: Г)

Задатак 2.
Ако је $\log 5=a$, $\log 3=b$, тада је $\log_{30}8$ једнако:

А) $\frac{3-3a}{b+1}$; Б) $\frac{2-2a}{b+1}$; В) $\frac{3+3a}{b+1}$; Г) $\frac{2-2b}{a+1}$.

Решење:

На основу особина логаритама добија се:

$$\log_{30} 8 = \frac{\log 8}{\log 30} = \frac{\log 2^3}{\log 3\cdot 10} = \frac{3\log 2}{\log 3+\log 10} = \frac{3\log\frac{10}{5}}{\log 3+\log 10} = \frac{3\cdot(\log 10-\log 5)}{\log 3+\log 10} = \frac{3\cdot(1-a)}{b+1} = \frac{3-3a}{b+1}$$

Одговор: А)

Задатак 3.

Вредност израза $\left(1-\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(1+\sin\frac{\pi}{12}\right)$ је:

А) 2 ; Б) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; В) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; Г) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Решење:

Користећи формулу за разлику квадрата и одговарајуће тригонометријске идентитете добија се:

$$\left(1-\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(1+\sin\frac{\pi}{12}\right) = 1-\sin^2\frac{\pi}{12} = \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Одговор: Г)

Задатак 4.

Збир прва четри члана аритметичког низа једнак је 2, а следећа 4 једнак је 18. Број чланова овог низа које треба сабрати да би се добио збир 35 је:

А) 10 ; Б) 14 ; В) 20 ; Г) 16.

Решење:

Према условима задатка $S_4 = 2$ и $S_8 = S_4 + 18 = 20$. Из формуле за збир првих n чланова аритметичког низа $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ и датих услова добија се следећи систем линеарних једначина $\frac{4}{2}(2a_1 + (4-1)d) = 2 \wedge \frac{8}{2}(2a_1 + (8-1)d) = 20$ тј. $4a_1 + 6d = 2 \wedge 8a_1 + 28d = 20$. Овај систем има решења $a_1 = -1$ и $d = 1$. Ако је n број првих чланова низа чији је збир 35, онда је $\frac{n}{2}\left(-2+(n-1)\right) = 35$, односно $n^2 - 3n - 70 = 0$. Решавањем квадратне једначине добија се $n = 10$.

Одговор: А)

Задатак 5.

Ако су $AB = c$, $AC = b$, две странице троугла ABC и збир висина h_c и h_b једнак је трећој висини h_a $(h_a = h_c + h_b)$, тада је страница a овог троугла једнака:

А) $\frac{bc}{b+c}$; Б) $\frac{b}{b+c}$; В) $\frac{c-b}{bc}$; Г) $\frac{c+b}{b}$.

Решење:

Како је површина троугла $P = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{b\cdot h_b}{2} = \frac{c\cdot h_c}{2}$, то је $h_a = \frac{2P}{a}, h_b = \frac{2P}{b}, h_c = \frac{2P}{c}$ и како за висине овог троугла важи $h_a = h_c + h_b$ добија се $\frac{2P}{a} = \frac{2P}{c} + \frac{2P}{b}$, одакле следи $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{b+c}{cb}$, те је $a = \frac{bc}{b+c}$.

Одговор: А)

2016.

Задатак 1.

Вредност израза $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \left(\frac{x-4}{2x-5}\right)^{-1}\right) \div \frac{5}{x-4}$ је:

а) 2 б) $x+2$ в) $2x$ г) 1

Решење:

За $x \geq 0$, $x \neq 4$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \left(\frac{x-4}{2x-5}\right)^{-1}\right) \div \frac{5}{x-4} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\cdot\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2x-5}{x-4}\right) \div \frac{5}{x-4}$$

$$= \left(\frac{x-2\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}-2x+5}{x-4}\right)\cdot\frac{x-4}{5} = \frac{5}{x-4}\cdot\frac{x-4}{5} = 1$$

Одговор: Г)

Задатак 2.

Једначина $\sin\frac{x}{6} + \cos\frac{x}{3} = 1$ има на интервалу $[0, 2\pi)$

а) два решења б) три решења в) пет решења г) нема решења

Решење:

$$\sin\frac{x}{6}+\cos\frac{x}{3}=1 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{6}=1-\cos\frac{x}{3} \Leftrightarrow \sin\frac{x}{6}=2\sin^2\frac{x}{6} \Leftrightarrow \sin\frac{x}{6}\left(2\sin\frac{x}{6}-1\right)=0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{6}=0 \vee \sin\frac{x}{6}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\frac{x}{6}=k\pi \vee \frac{x}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{x}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow x=6k\pi \vee x=\pi+12k\pi \vee x=5\pi+12k\pi$

Како решење треба припадати интервалу $[0, 2\pi)$ то су решења x=0 и $x=\pi$.

Одговор: А)

Задатак 3.

Бројеви $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+19)$, представљају три узастопна члана аритметичког низа за:

а) $x=1$ б) $x=\log_2 3$ в) $x=\log_5 2$ г) $x=3$

Решење:

Како је разлика два узастопна члана аритметичког низа константна то је

$$\log(2^x+1)-\log 3=\log(2^x+19)-\log(2^x+1) \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{2^x+1}{3}\right)=\log\left(\frac{2^x+19}{2^x+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2^x+1}{3}=\frac{2^x+19}{2^x+1} \Leftrightarrow (2^x+1)^2=3*(2^x+19) \Leftrightarrow$$

$$(2^x)^2+2*2^x+1=3*2^x+57 \Leftrightarrow (2^x)^2-2^x-56=0,$$

Након увођења смене $t=2^x, t>0$. Једначина се своди на $t^2-t-56=0$ чија су решења t_1=8 и t_2=-7. Како је $t>0$ то је решење које задовољава услов t = 8, односно 2^x=8=2^3 одакле је x=3.

Одговор: Г)

Задатак 4.

Површина једнакостраничног троугла је $4\sqrt{3}\ cm^2$. Површина кружног прстена који граде описани и уписани круг тог троугла је:

а) $4\ \pi cm^2$. б) $12\ cm^2$ в) $16\sqrt{3}cm^2$ г) $64\pi\ cm^2$

Решење:

Означимо са a страницу троугла и h висину. Применом формуле за површину троугла $\mathrm{P} = \frac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{4}}\sqrt{3}$, добија се: $4\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 16$, одакле је $a = 4cm$. Како је површина кружног прстена $P = (R^2 - r^2)\pi$ и $R = \frac{2}{3}h, r = \frac{1}{3}h$ заменом у формули за површину кружног прстена добија се $P = \left(\frac{4}{9}h^2 - \frac{1}{9}h^2\right)\pi = \frac{1}{3}h^2\pi$. Заменом $h = a\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3cm}$ добија се $P = 4\pi cm^2$.

Одговор: А)

Задатак 5.

Једначине тангенте круга $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ које пролазе кроз пресек правих $x - 2y - 8 = 0$ и $y = 3x - 14$ су:

а) $y = 2x - 10$ и $2y + x = 0$ б) $y = x + 10$ и $y = 2x - 10$ в) $y - 2x = 10$ и $y = 2x + 10$ г) $y = x - 1$ и $y + 2x = 10$

Решење:

Права $y = kx + n$ додирује кружницу $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ ако је испуњен услов додира $(kp - q + n)^2 = r^2(k^2 + 1)$. Једначина кружнице може се записати у облику:$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$. Центар ове кружнице је тачка $C = (1, -3)$, и полупречник $r = \sqrt{5}$. Решавањем система $x - 2y - 8 = 0$ и $3x - y - 14 = 0$ добија се пресечна тачк $P = (4, -2)$. Заменом у једначини тангенте $y = kx + n$ добија се $n = -4k - 2$ Из услова додира тангенте и кружнице добија се $(k + 3 - 2 - 4k)^2 = 5(k^2 + 1)$. Након сређивања претходне једначине добија се $4k^2 - 6k - 4 = 0$ Одакле је $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = 2$, а тражене једначине тангенти су: $y = 2x - 10$ и $2y + x = 0$

Одговор: А)

2017.

Задатак 1.

Збир решења једначине $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \boldsymbol{3 - x}$ је:

а) 2; б) $x + 2$; в) $2x$; г) 3.

Решење:

$\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{x^2+4x+4}=\mathbf{3-x} \Leftrightarrow \sqrt{(\mathbf{2x-3})^2}-\sqrt{(\mathbf{x+2})^2}=\mathbf{3-x} \Leftrightarrow |\mathbf{2x-3}|-|\mathbf{x+2}|=\mathbf{3-x}$

Како је $|\mathbf{2x-3}|=\begin{cases}\mathbf{2x-3}, & x\geq\frac{3}{2}\\ \mathbf{3-2x}, & x<\frac{3}{2}\end{cases}$ и $|\mathbf{x+2}|=\begin{cases}\mathbf{x+2}, & \mathbf{x\geq-2}\\ \mathbf{-2-x}, & x<\mathbf{-2}\end{cases}$, то x може припадати следећим интервалима $(-\infty, -2)$; $\left[-2, \frac{3}{2}\right)$; $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Разликујемо три случаја:

1) $x<-2$, 2) $-2\leq \boldsymbol{x}<\frac{3}{2}$, 3) $\boldsymbol{x}\geq\frac{3}{2}$.

	$\boldsymbol{x}<-2$	$-2\leq \boldsymbol{x}<\frac{3}{2}$	$\boldsymbol{x}\geq\frac{3}{2}$
$\lvert\mathbf{2x-3}\rvert$	$\mathbf{3-2x}$	$\mathbf{3-2x}$	$\mathbf{2x-3}$
$\lvert\mathbf{x+2}\rvert$	$\mathbf{-2-x}$	$\mathbf{x+2}$	$\mathbf{x+2}$

1) За $x\in(-\infty, -2)$ дата једначина еквивалентна је једначини
$\mathbf{3-2x-(-2-x)=3-x \Leftrightarrow 5-x=3-x}$, па једначина у овом случају нема решења.

2) За $x\in\left[-2, \frac{3}{2}\right)$ дата једначина постаје

$$\mathbf{3-2x-(x+2)=\ 3-x \Leftrightarrow 1-3x=3-x \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1}.$$

3) За $x\in\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ дата једначина еквивалентна је једначини

$$\mathbf{2x-3-(x+2)=\ 3-x \Leftrightarrow x-5=3-x \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4}.$$

Дакле, $x=-1$ и $x=4$ су решења полазне једначине , па је збир решења -1+4=3.

Одговор: Г)

Задатак 2.

Ако је $\mathbf{\log 2=a}$, $\mathbf{\log 7=b}$, тада је $\mathbf{\log_5 9.8}$ једнако:

а) $\frac{a+2b-1}{1-a}$; б) $\frac{2-2a}{b+1}$; в) $\frac{2-2b}{a+1}$; г) 1.96;

Решење:

На основу особина логаритама добија се:

$$\mathbf{\log_5 9.8}=\frac{\log 9.8}{\log 5}=\frac{\log\frac{98}{10}}{\log\frac{10}{2}}=\frac{\log 98-\log 10}{\log 10-\log 2}=\frac{\log 2\cdot 49-1}{1-a}=\frac{\log 2+\log 49-1}{1-a}=\frac{a+\log 7^2-1}{1-a}=\frac{a+2\log 7-1}{1-a}=\frac{a+2b-1}{1-a}.$$

Одговор: А)

Задатак 3.

Вредност израза $\frac{\cos 81^\circ + \cos 71^\circ + \cos 21^\circ + \cos 11^\circ}{\sin 81^\circ + \sin 71^\circ - \sin 21^\circ - \sin 11^\circ}$ је:

а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $\sqrt{3}$.

Решење:

Користећи формуле за трансформацију збира и разлике тригонометријских функција у производ добија се:

$$\frac{\cos 81^\circ + \cos 71^\circ + \cos 21^\circ + \cos 11^\circ}{\sin 81^\circ + \sin 71^\circ - \sin 21^\circ - \sin 11^\circ} = \frac{\cos 81^\circ + \cos 21^\circ + \cos 71^\circ + \cos 11^\circ}{\sin 81^\circ - \sin 21^\circ + \sin 71^\circ - \sin 11^\circ}$$
$$= \frac{2\cos\frac{81^\circ - 21^\circ}{2}\cos\frac{81^\circ + 21^\circ}{2} + 2\cos\frac{71^\circ - 11^\circ}{2}\cos\frac{71^\circ + 11^\circ}{2}}{2\sin\frac{81^\circ - 21^\circ}{2}\cos\frac{81^\circ + 21^\circ}{2} + 2\sin\frac{71^\circ - 11^\circ}{2}\cos\frac{71^\circ + 11^\circ}{2}}$$
$$= \frac{2\cos 30^\circ \cos 51^\circ + 2\cos 30^\circ \cos 41^\circ}{2\sin 30^\circ \cos 51^\circ + 2\sin 30^\circ \cos 41^\circ} = \frac{2\cos 30^\circ(\cos 51^\circ + \cos 41^\circ)}{2\sin 30^\circ(\cos 51^\circ + \cos 41^\circ)}$$
$$= \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Одговор: Г)

Задатак 4.

Нумеричке вредности страница троугла су чланови аритметичког низа. Странице се разликују за $3cm$. Ако је обим тог троугла 36 cm, онда је површина кружног прстена који граде описани и уписани круг тог троугла

а) $\frac{189}{4}\ \pi cm^2$; б) 12 cm^2; в) $36\sqrt{3}cm^2$; г) $64\pi\ cm^2$.

Решење:

Нека су $a-d,\ a,\ a+d$ чланови аритметичког низа. Из услова задатка следи да је $d=3$ и $a-d+\ a+\ a+d=36$. Одатле је $a=12$. Отуда су странице троугла $b=a-d=9,\ a=12,\ c=a+d=15$ (у cm). С обзиром да су све три странице троугла познате површина се може израчунати помоћу Хероновог обрасца $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ s=\frac{a+b+c}{2}$. Заменом одговарајућих вредности следи да је $P = 54cm^2$. Како је полупречнок уписаног круга $r = \frac{P}{S} = \frac{54cm^2}{18cm} = 3cm$, а полупречник описаног круга $R = \frac{abc}{4P} = \frac{15}{2}cm$ то је површина кружног прстена $P = (R^2 - r^2)\pi = \frac{189}{4}\ \pi cm^2$.

Одговор: А)

Задатак 5.

У праву четворострану призму чија је основа једнакокраки трапез уписан је ваљак висине H=10 cm и пречника основе $R = 12cm$. Ако је крак трапеза $c = 15cm$, тада је запремина призме:

а) $1800cm^3$; б) $360cm^3$; в) $180cm^3$; г) $1440cm^3$.

Решење:

Како је ваљак уписан у призму, то је основа призме тангентни четвороугао, па су збирови наспрамних страница једнаки, тј. $a + b = 2c$, пречник основе ваљка једнак је висини основе призме $h = R = 12cm$. Површина основе призме $B_P = \frac{a+b}{2}h = 180cm^2$. Запремина призме $V_P = B_P \cdot H = 1800cm^3$.

Одговор: А)

2018.

Задатак 1.

Производ решења једначине $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 10$ је:

а) 2 ; б) -2 ; **в) -4 ;** г) -16 .

Решење:

Дату једначину можемо записати и у следећем облику: $\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 10$. Како је $\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right) = 1$, то је $5-2\sqrt{6} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}}$. Коришћењем смене да је $t = \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}$, једначина добија облик: $t + \frac{1}{t} = 10$, односно, $t^2 - 10t + 1 = 0$.

Решења квадратне једначине су: $\boldsymbol{t_1 = 5 - 2\sqrt{6}}$ и $\boldsymbol{t_2 = 5 + 2\sqrt{6}}$. Враћањем смене добија се:

$$\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 5-2\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \ ;$$

$$\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 5+2\sqrt{6} = \frac{1}{5-2\sqrt{6}} = \left(5-2\sqrt{6}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2 \ .$$

Производ решења једначине једнак је $\boldsymbol{-4}$

Одговор: В)

Задатак 2.

Вредност израза $\dfrac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(2+\sin 2x)}{\cos^3 x - \sin^3 x}$ једнака је:

а) $\cos x + \sin x$; **б)** $\boldsymbol{2(\cos x + \sin x)}$; в) $\cos^2 x + 1$; г) 2.

Решење:

Коришћењем формуле за разлику квадрата, разлику кубова и изражавањем синуса двоструког угла, дати израз је једнак:

$$\frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(2+\sin 2x)}{\cos^3 x - \sin^3 x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)\cdot 2(1+\sin x \cdot \cos x)}{(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x)} \ .$$

Скраћивањем истих чинилаца и коришћењем основног тригонометријског идентитета

$\boldsymbol{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$, добија се: $\dfrac{(\cos x + \sin x)\cdot 2(1+\sin x \cdot \cos x)}{1+\sin x \cdot \cos x} = \boldsymbol{2\,(\cos x + \sin x)}$,

Одговор: Б)

Задатак 3.

Ако су: $\log_7\left(16 \cdot 2^{\frac{4x-13}{3}}\right)$, $\dfrac{x+1}{\log_2 7}$ и $\log_7\left(\dfrac{1}{32} \cdot 2^{\frac{5x}{3}+7}\right)$ прва три члана аритметичког низа, тада је x једнако:

а) 3; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{5}$; **г)** $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$.

Решење:

Свођењем чланова аритметичког низа на исту основу логаритма и сређивањем степена истих основа, добија се:

$$a_1 = log_7\left(16 \cdot 2^{\frac{4x-13}{3}}\right) = log_7\left(2^4 \cdot 2^{\frac{4x-13}{3}}\right) = log_7 2^{\frac{4x-1}{3}} \quad ;$$

$$a_2 = \frac{x+1}{log_2 7} = (x+1)\, log_7 2 = log_7 2^{x+1} \quad ;$$

$$a_3 = log_7\left(\frac{1}{32} \cdot 2^{\frac{5x}{3}+7}\right) = log_7 \frac{2^{\frac{5x}{3}+7}}{2^5} = log_7 2^{\frac{5x}{3}+2} \quad .$$

По дефиницији аритметичког низа важи $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, па је:

$$log_7 2^{x+1} - log_7 2^{\frac{4x-1}{3}} = log_7 2^{\frac{5x}{3}+2} - log_7 2^{x+1} \quad .$$

Како је разлика логаритама истих основа једнака логаритму количника аргумената, важи да је:

$$log_7 \frac{2^{x+1}}{2^{\frac{4x-1}{3}}} = log_7 \frac{2^{\frac{5x}{3}+2}}{2^{x+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^{x+1}}{2^{\frac{4x-1}{3}}} = \frac{2^{\frac{5x}{3}+2}}{2^{x+1}} \quad .$$

Сређивањем степена броја 2, добија се:

$$2^{2x+2} = 2^{\frac{9x+5}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad 2x+2 = \frac{9x+5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$$

Одговор: Г)

Задатак 4.

Обим и површина троугла који образују пресечне тачке праве p: $\boldsymbol{x+y-3=0}$ и кружнице
K: $\boldsymbol{x^2+y^2+8y-9=0}$ и центар дате кружнице је:

а) $\boldsymbol{O = 10+\sqrt{2}}$ $\boldsymbol{P = \frac{7}{2}}$ **;**

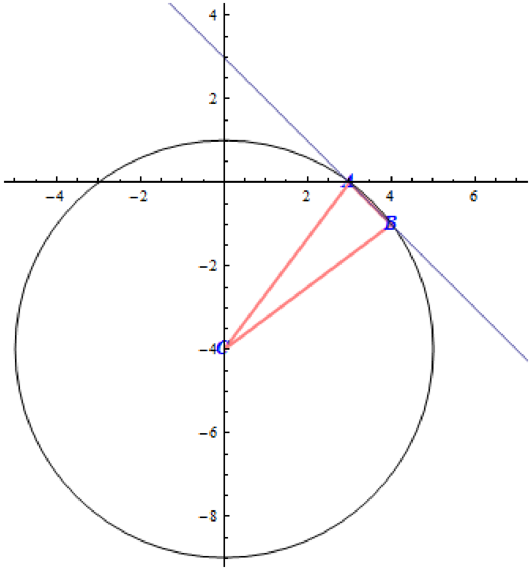
б) $O = \frac{10-\sqrt{2}}{7}$ $P = \frac{-7}{2}$;

в) $O = 10-\sqrt{2}$ $P = \frac{2}{7}$;

г) $O = 10+\sqrt{2}\ cm$ $P = \frac{7}{2}\ cm^2$.

Решење:

Пресечне тачке праве и кружнице (A и B) добијамо решавањем система једначина: $x+y-3=0$ и $x^2+y^2+8y-9=0$; $A(3,0)$ и $B(4,-1)$.



Троугао ABC је једнакокраки, јер је $AC=BC=r$. Свођењем једначине кружнице на општи облик, добија се: K: $x^2+(y+4)^2=25$, па је центар кружнице тачка $C(0,-4)$, а полупречник $r=5$. Тако су познате две странице троугла: $AC=BC=r=5$. Трећу страницу AB можемо добити као растојање између две тачке: $d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{2}$. Обим троугла једнак је:

$$O=5+5+\sqrt{2}=10+\sqrt{2}\ .$$

Како су познате координате сва три темена троугла, површину троугла можемо израчунати преко формуле:

$$P=\frac{1}{2}\ |x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|=\frac{7}{2}\ .$$

Одговор: А)

117

Задатак 5.

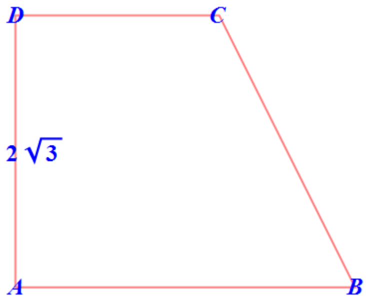
Површина тела које настаје ротацијом правоуглог трапеза $\boldsymbol{ABCD}$ око мањег крака $\boldsymbol{AD = 2\sqrt{3}\ cm}$, ако је површина трапеза $\boldsymbol{P = 18\sqrt{3}\ cm^2}$ и разлика основица трапеза $\boldsymbol{6cm}$, једнака је:

а) $244\sqrt{3}\,\pi\ cm^2$; б) $(45+18\sqrt{3})4\,\pi\ cm^3$; в) $(180+72\,)\sqrt{3}\pi\ cm^2$; **г)**$\boldsymbol{(180+72\sqrt{3})\,\pi\ cm^2}$.

Решење:

Правоугли трапез који ротира око мањег крака формира зарубљену купу, за коју важи да су полупречници основа једнаки основицама трапеза а висина зарубљене купе једнака је висини, односно, мањем краку трапеза.

Површина зарубљене купе једнака је: $\boldsymbol{P = {r_1}^2\,\pi + {r_2}^2\,\pi + (r_1 + r_1)\pi\, s}$.



Како је површина трапеза једнака:

$$\boldsymbol{P = \frac{a+b}{2}h = \frac{a+b}{2}\cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\ cm^2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 18\ cm} \ .$$

Како је дата разлика основица $\boldsymbol{a - b = 6\ cm}$, решавањем система добијамо основице, односно полупречнике основа:

$$\boldsymbol{r_1 = a = 12\ cm \quad \Rightarrow \quad {r_1}^2\,\pi = 144\,\pi\ cm^2} \ ,$$
$$\boldsymbol{r_2 = b = 6\ cm \quad \Rightarrow \quad {r_2}^2\,\pi = 36\,\pi\ cm^2} \ .$$

Изводница купе добија се Питагорином теоремом: $\boldsymbol{s^2 = BC^2 = h^2 + (a-b)^2 = 48\ cm^2}$, па је $\boldsymbol{s = 4\sqrt{3}\ cm}$.

Површина зарубљене купе једнака је:

$$P = r_1{}^2\,\pi + r_2{}^2\,\pi + (r_1 + r_1)\pi\, s = 144\,\pi\, cm^2 + 36\,\pi\, cm^2 + 18 cm\,\pi \cdot 4\sqrt{3}\, cm ,$$

$$P = \left(180 + 72\sqrt{3}\right)\pi\, cm^2 .$$

<u>Одговор: Г)</u>

БЕЛЕШКЕ:

БЕЛЕШКЕ:

БЕЛЕШКЕ:

Издавач
Висока техничка школа струковних студија

За издавача
др Александра Боричић

Задатке из математике припремили професори школе
др Милица Цветковић, професор
др Наташа Савић, предавач

Информатор приредио
ВТШ промо тим

Компјутерска обрада и корица
Немања Петровић

Штампа ГРАФИКА ГАЛЕБ Ниш

Тираж
350 примерака

Година издавања
2019.

ВИСОКА ТЕХНИЧКА ШКОЛА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА НИШ
Александра Медведева 20, 18000 Ниш
телефон: 018 588 211 ; факс: 018 588 210
е маил: info@vtsnis.edu.rs ; сајт: www.vtsnis.edu.rs